М 9

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования Башкирский государственный педагогический университет им. М.Акмуллы

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

АКМУЛЛИНСКАЯ ОЛИМПИАДА

по МАТЕМАТИКЕ

(указать название олимпиады)

Участник Данилов Алексей Евгеньевич

(фамилия имя отчество)

Дата проведения олимпиады

« 18 » Февраля 20 22 г.

М9

Σ = 30

ЛИСТ ОТВЕТА

1	2	3	4	5	6
5	5	5	5	5	5

Задание 6.

$\sqrt{\frac{18x-32-x^2}{35}} \leqslant \frac{18x-32-x^2}{35}$

1) О.Д.З.: $\frac{18x-32-x^2}{35} \geq 0 \,/\cdot -1$; $\frac{x^2-18x+32}{35} \leq 0$; $\frac{(x-16)(x-2)}{35} \leq 0$.

$x^2-18x+32=0$

$D_1 = 81-32=49=7^2$

$x_1 = 9+7=16$; $x_2 = 9-7=2$

$x \in [2;16]$

Возведем обе части неравенства в квадрат:

$\frac{18x-32-x^2}{35} \leqslant \left(\frac{18x-32-x^2}{35}\right)^2$

$\frac{18x-32-x^2}{35} - \frac{(18x-32-x^2)^2}{35^2} \leqslant 0$

$\frac{(18x-32-x^2)\cdot 35 - (18x-32-x^2)^2}{35^2} \leqslant 0$

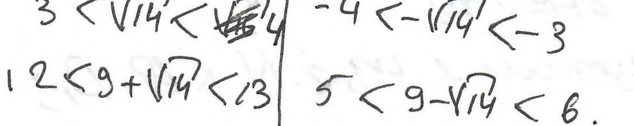
$\frac{(18x-32-x^2)(35-18x+32+x^2)}{35^2} \leqslant 0$.

$-(x-16)(x-2)(x-9+\sqrt{14})(x-9-\sqrt{14}) \leqslant 0 \,/\cdot -1$; $(x-16)(x-2)(x-9+\sqrt{14})(x-9-\sqrt{14}) \geq 0$

$\sqrt{9}<\sqrt{14}<\sqrt{16}$ | $-\sqrt{16}<-\sqrt{14}<-\sqrt{9}$

$3<\sqrt{14}<4$ | $-4<-\sqrt{14}<-3$

$12<9+\sqrt{14}<13$ | $5<9-\sqrt{14}<6$.

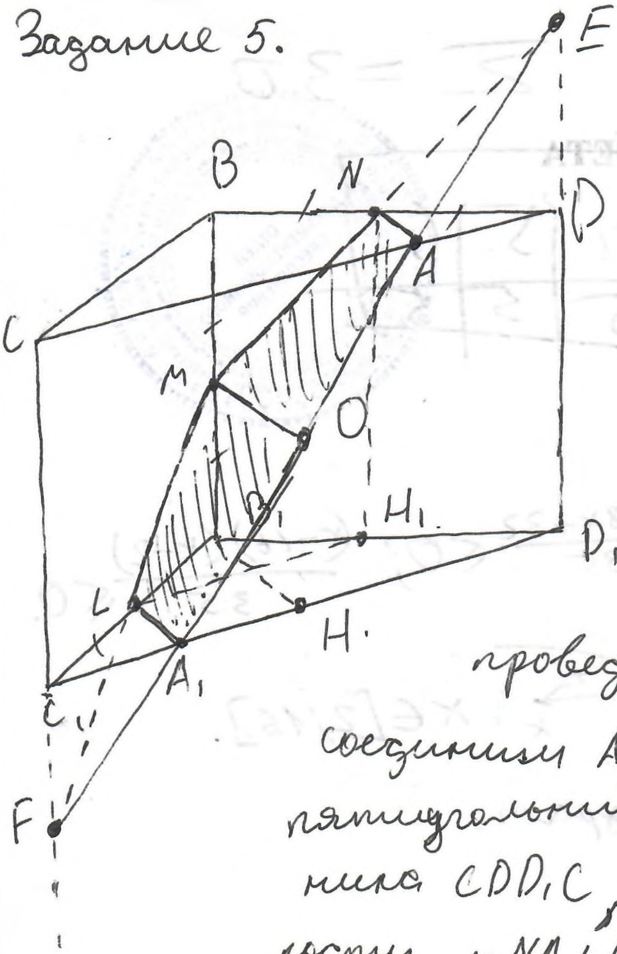


С учетом О.Д.З. решением нер-ва является $x \in \{2\} \cup [9-\sqrt{14}; 9+\sqrt{14}] \cup \{16\}$

Ответ: $\{2\} \cup [9-\sqrt{14}; 9+\sqrt{14}] \cup \{16\}$.

Ответ на 2 стр. Подпись участника

Задание 5.



Дано: $BD=BC=BB_1=8$ м.
$\angle CBD=90^\circ$
$S_{сеч}$ - ?

Отметим т. L, M, N $BN=ND$; $B_1L=C_1L$
$BM=MB$ (по условию) и $BB_1=BC$ (по усл.) $\Rightarrow$
$\Rightarrow CBB_1C_1$ - квадрат.
Аналогично: BDD_1B_1 - квадрат.
Достроим.
$(CC_1)\cap(ML)=F$, $(BD_1)\cap(MN)=E$
проведем прямую $EF \Rightarrow (EF)\cap(C_1D_1)=A_1$,
$(EF)\cap(CD)=A$
соединим AN; NM; ML; LA получим в сечении пятиугольник, Отметим т. O - середину прямоугольника CDD_1C, т.к. LA_1; MO, NA лежат в одной плоскости и $NA\perp EF$; $MO\perp EF$; $LA_1\perp EF \Rightarrow NA\parallel MO\parallel LA_1$.
Т.к. $NA\parallel MO\parallel LA_1$ и $MN=ML$ (из равенства $\triangle NBM$ и $\triangle LB_1M$ (по двум сторонам и углу между ними)) по т. Фалеса $A_1O=AO=\frac{1}{2}AA_1 \Rightarrow$
$\Rightarrow MOA_1L=MOAN \Rightarrow$ площадь пятиугольника равна
$2S_{MOA_1L}=2\cdot\frac{MO+LA_1}{2}\cdot OA_1=(MO+LA_1)\cdot OA_1$. Проведем высоту
B_1H в $\triangle C_1B_1D_1$ $B_1H=MO=\frac{1}{2}C_1D=\frac{1}{2}\sqrt{64+64}=\frac{1}{2}\cdot 8\sqrt{2}=4\sqrt{2}$.
LA - средняя линия $\triangle C_1B_1H \Rightarrow LA_1=\frac{1}{2}B_1H=2\sqrt{2}$
проведем LN; $LN=AA_1 \Rightarrow A_1O=\frac{1}{2}LN$ опустим $\perp$ из т. N к B_1D_1;
$NH_1=DD_1$ (по опр прямоугольника) LH_1 - средняя линия
$\triangle C_1B_1D_1$, $LH_1=\frac{1}{2}C_1D_1=4\sqrt{2}$ по т. Пифагора $LN=\sqrt{32+64}=4\sqrt{6}$.
$AO=\frac{4\sqrt{6}}{2}=2\sqrt{6}$ Найдем площадь сечения
$S_{сеч}=(4\sqrt{2}+2\sqrt{2})\cdot 2\sqrt{6}=6\sqrt{2}\cdot 2\cdot\sqrt{6}=12\cdot 2\cdot\sqrt{3}=24\sqrt{3}$ м^2

Ответ: $24\sqrt{3}$ (м^2)

ЛИСТ ОТВЕТА

Задание 1

Пусть $\frac{a}{729} = x$ – количество воды, которую вливают, тогда доля кислоты в растворе $1-x$. До разбавления доля кислоты в растворе 1 после первого разбавления доля кислоты равна $1-x$, после второго $(1-x)(1-x) \Rightarrow$ после шестого разбавления доля кислоты равна $(1-x)^6$, по условию, в баке осталось 64 литра кислоты $\Rightarrow$ доля кислоты $= \frac{64}{729} = (1-x)^6$

$\left(\frac{2}{3}\right)^6 = (1-x)^6$; $\frac{2}{3} = 1-x \Rightarrow x = 1-\frac{2}{3} = \frac{1}{3} = \frac{9}{729} \Rightarrow a = \frac{729}{3} = 243.$

Ответ: 243(л.)

Задание 2.

Решим задачу с помощью арифметической прогрессии.

$a_1 = -540$ (первый член, удовлетворяющий условию)

$a_n = 480$ (последний член прогрессии, удовлетворяющий условию).

$a_{n-1} = 450$ (предпоследний член прогрессии, удовлетворяющий условию).

Тогда разность арифметической прогрессии $d = a_n - a_{n-1} =$

$= 480 - 450 = 30$; $a_n = a_1 + d(n-1)$; $480 = -540 + 30(n-1)$

$480 + 540 + 30 = 30n$; $1050 = 30n \Rightarrow n = \frac{105}{3} = 35.$

$S_{35} = \frac{a_{35}+a_1}{2} \cdot n = \frac{-540+480}{2} \cdot 35 = -\frac{60}{2} \cdot 35 = -1050$

Ответ: -1050

Ответ на 2 стр.

Подпись участника

Задание 3

$|5x-x^2-8|+|x-9|=x^2-6x+17.$

Рассмотрим все случаи:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 5x-x^2-8\geq 0, \\ x-9\geq 0; \\ 5x-x^2-8+x-9=x^2-6x+17; \end{cases} \\ \begin{cases} 5x-x^2-8\geq 0, \\ x-9<0, \\ 5x-x^2-8-x+9=x^2-6x+17; \end{cases} \\ \begin{cases} 5x-x^2-8<0, \\ x-9<0, \\ -5x+x^2+8-x+9=x^2-6x+17; \end{cases} \\ \begin{cases} 5x-x^2-8<0, \\ x-9\geq 0, \\ -5x+x^2+8+x-9=x^2-6x+17; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \{\varnothing, \\ \{\varnothing, \\ \{x\in(-\infty;9), \\ \{x=9, \end{array}\right. \quad \left[\; x\in(-\infty;9]. \right.$$

Решим первую систему

1) $5x-x^2-8\geq 0$ $\quad -x^2+5x-8=0$

$D=25-32=-7<0$, т.к. $D<0 \Rightarrow \cap$ с Ox нет,

функция $5x-x^2-8$ - парабола, т.к. коэфицент. $a<0$ ветви параболы направлены вниз $\Rightarrow$ функция отрицательна на всей длине $\Rightarrow$ $\Rightarrow 5x-x^2-8\geq 0$ решений нет $\Rightarrow$ система не имеет решений.

Решим вторую систему.

2) $5x-x^2-8\geq 0$ $\quad -x^2+5x-8=0$

$D=25-32=-7<0$; т.к. $D<0 \Rightarrow \cap$ с Ox нет,

функция $5x-x^2-8$ - парабола, т.к. коэфицент. $a<0$ ветви параболы направлены вниз $\Rightarrow$ функция отрицательна на всей длине $\Rightarrow 5x-x^2-8\geq 0$ решений нет $\Rightarrow$ система не имеет решений.

3

ЛИСТ ОТВЕТА

Решим третью систему

1) $5x - x^2 - 8 < 0$; $5x - x^2 - 8 = 0$

$D = 25 - 32 = -7 < 0 \Rightarrow$ П с ох нет.

функция $5x - x^2 - 8$ – парабола, т.к. коэфицент $a < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ функция отрицательна на всей ~~числовой~~ ~~прямой~~ длине.

$\Rightarrow 5x - x^2 - 8 < 0 \quad x \in R$

2) $x - 9 < 0$

$x < 9 \quad x \in (-\infty; 9)$

3) $-5x + x^2 + 8 - x + 9 = x^2 - 6x + 17$

$x^2 - x^2 - 6x + 6x + 17 - 17 = 0$.

$0 = 0$

$x \in R$. $\Rightarrow$ решением системы является $x \in (-\infty; 9)$

Решим четвертую систему

1) $5x - x^2 - 8 < 0$; $5x - x^2 - 8 = 0$.

$D = 25 - 32 = -7 < 0 \Rightarrow$ П с ох нет.

ф-ия $5x - x^2 - 8$ – парабола, т.к. коэфицент $a < 0 \Rightarrow$ ф-ия отрицательна на всей длине $\Rightarrow 5x - x^2 - 8 < 0 \quad x \in R$.

2) ~~$x - 9 < 0$~~ ~~$x < 9$~~ $x - 9 \geq 0$

$x \geq 9 \quad x \in [9; +\infty)$

3) $-5x + x^2 + 8 + x - 9 = x^2 - 6x + 17$;

$x^2 - x^2 - 4x + 6x - 1 - 17 = 0$

$2x = 18$

$x = 9$ $\Rightarrow$ решением системы является $x = 9$.

Найдем объединение всех 4х систем: $x \in (-\infty; 9]$

Ответ: $(-\infty; 9]$

Ответ на 2 стр. Подпись участника

Задание 4.

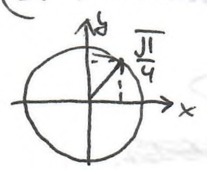
$\sin^2\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+\sin^2\left(\frac{5}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)=1$

$\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{5}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(\frac{5}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)=1$

$\left(\sin 2x\cdot\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos 2x\right)\cdot\left(\sin 2x\cdot\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos 2x\right)+$

$+\left(\sin\frac{5}{2}x\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{5}{2}x\right)\left(\sin\frac{5}{2}x\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{5}{2}x\right)=1$

$\left(\sin 2x\cdot\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos 2x\right)^2+\left(\sin\frac{5}{2}x\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{5}{2}x\right)^2=1$



$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}$.

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2(\sin 2x-\cos 2x)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\left(\sin\frac{5}{2}x+\cos\frac{5}{2}x\right)^2=1$;

$\frac{1}{2}\left(\sin^2 2x-2\sin 2x\cdot\cos 2x+\cos^2 2x\right)+\frac{1}{2}\left(\sin^2\frac{5}{2}x+2\sin\frac{5}{2}x\cdot\cos\frac{5}{2}x+\cos^2\frac{5}{2}x\right)=1$;

$\frac{1}{2}(1-\sin 4x)+\frac{1}{2}(1+\sin 5x)=1$;

$\frac{1}{2}-\frac{\sin 4x}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\sin 5x}{2}=1$;

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1+\frac{\sin 5x-\sin 4x}{2}=0$;

$\frac{\sin 5x-\sin 4x}{2}=0 \mid\cdot 2$; $\sin 5x-\sin 4x=0$;

$2\sin\frac{5x-4x}{2}\cdot\cos\frac{5x+4x}{2}=0 \mid :2$ $\sin\frac{5x-4x}{2}\cdot\cos\frac{5x+4x}{2}=0$.

$\sin\frac{5x-4x}{2}=0$ или $\cos\frac{5x+4x}{2}=0$.

$\sin\frac{x}{2}=0$ $\qquad$ $\cos\frac{9x}{2}=0$

$\frac{x}{2}=\pi k$ $\qquad$ $\frac{9x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi n$

$x=2\pi k;\ k\in\mathbb{Z}$ $\qquad$ $x=\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi n}{9},\ n\in\mathbb{Z}$

$k=0\quad x=0$

$k=1\quad x=2\pi=360^\circ$

$n=0\quad x=\frac{\pi}{9}=20^\circ$

$n=1\quad x=\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi}{9}=60^\circ$

$n=2\quad x=\frac{\pi}{9}+\frac{4\pi}{9}=100^\circ$

$n=3\quad x=\frac{\pi}{9}+\frac{6\pi}{9}=140^\circ$

$n=4\quad x=\frac{\pi}{9}+\frac{8\pi}{9}=180^\circ$

найдем сумму корней $\in[0^\circ;180^\circ]$

$0^\circ+20^\circ+60^\circ+100^\circ+140^\circ+180^\circ=500^\circ$

Ответ: 500°