

Олимпиадная работа

Ученика 11в класса

МОБУ СОШ с.Старосубхангулово

Ахметова Марселя

1 задача

Размерность скорости света – m/s . Заметив, что $h = kg \cdot m^2/s^2$, а $G = kg \cdot m^3/s^2$, получим соответствующую размерность для гравитационной постоянной $kg^{-1}m^3/s^2$ и постоянной Планка $kg \cdot m^2/s^2$.

Найдём размерность комбинации

$$x = c^\alpha G^\beta h^\gamma$$

$$[x] = \left(\frac{m}{s}\right)^\alpha \left(\frac{kg \cdot m^3}{s^2}\right)^\beta \left(\frac{kg \cdot m^2}{s^2}\right)^\gamma$$

Для L_P имеем:

$$\alpha + 3\beta + 2\gamma = 1$$

$$-\alpha - 2\beta - \gamma = 0$$

$$-\beta + \gamma = 0$$

откуда

$$\alpha = -\frac{3}{2}$$

$$\beta = \frac{1}{2}$$

$$\gamma = \frac{1}{2}$$

Отсюда

$$l_P = \sqrt{\frac{hG}{c^3}} \approx 1,6 \cdot 10^{-35} m$$

Для t_P :

$$\alpha_i + 3\beta_i + 2\gamma_i = 0$$

$$-\alpha_i - 2\beta_i - \gamma_i = 1$$

$$-\beta_i + \gamma_i = 0$$

откуда

$$\alpha_i = -\frac{5}{2}$$

$$\beta_i = \frac{1}{2}$$

$$\gamma_i = \frac{1}{2}$$

Отсюда

$$t_P = \sqrt{\frac{hG}{c^5}} \approx 5 \cdot 10^{-44} \text{ c}$$

Отметим, что можно было не решать систему, а сразу заметить, что $t_P = l_P/c$.

Для m_P :

$$\alpha_m + 3\beta_m + 2\gamma_m = 0$$

$$-\alpha_m - 2\beta_m - \gamma_m = 0$$

$$-\beta_m + \gamma_m = 1$$

откуда

$$\alpha_m = \frac{1}{2}$$

$$\beta_m = -\frac{1}{2}$$

$$\gamma_m = \frac{1}{2}$$

Отсюда

$$m_P = \sqrt{\frac{c h}{G}} \approx 2,1 \cdot 10^{-8} \text{ кг}$$

2 задача(в след. стр.)

Направим ось Ox вдоль наклонной плоскости сверху вниз, а ось Oy – перпендикулярно ей вверх (см. рисунок) – (1 балл). В проекции на оси Ox и Oy сумма сил, действующих на кубик равна 0:

$$mg \sin \alpha + N_1 - \mu N = 0$$

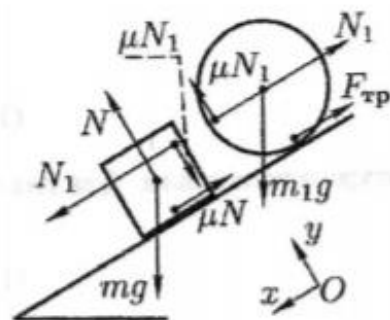
$$N - mg \cos \alpha - \mu N_1 = 0$$

Из данной системы можем найти N_1 :

$$N_1 = \frac{\mu - \operatorname{tg} \alpha}{1 - \mu^2} mg \cos \alpha$$

Для цилиндра в проекции на ось Ox сумма сил равна:

$$m_1 g \sin \alpha - N_1 - F_{\text{тр}} = 0$$



где m_1 – масса цилиндра.

Так как цилиндр не вращается, сумма моментов сил, действующих на него, равна 0. В качестве полюса, относительно которого заданы моменты, удобно принять ось цилиндра:

$$F_{\text{тр}} R - \mu N_1 R = 0$$

Зная $F_{\text{тр}} = \mu N_1$ (1 балл) и саму силу N_1 , находим

$$M_{\text{max}} = \frac{\mu \operatorname{ctg} \alpha - 1}{1 - \mu} m$$

$$\text{Ответ: } M_{\text{max}} = \frac{\mu \operatorname{ctg} \alpha - 1}{1 - \mu} m.$$

3 задача

Пусть в начальном состоянии объем гелия V_0 , давление p_0 , а температура T_0 . По условию конечный объем V_1 . Так как начальная и конечная температуры газа равны, из уравнения состояния найдём конечное давление: $p_1 = p_0 / k$.

Работа, совершённая газом в указанном процессе, численно равна площади под графиком на рисунке:

$$A = \frac{1}{2} \left(p_0 + \frac{p_0}{k} \right) (kV_0 - V_0) = \frac{p_0 V_0}{2k} (k^2 - 1)$$

Запишем уравнение процесса расширения гелия:

$$\frac{p_0 - p}{V - V_0} = \frac{p_0 - p_1}{kV_0 - V_0} = \frac{1}{k} \frac{p_0}{V_0}$$

Перепишем его в виде:

$$p + V \frac{p_0}{kV_0} = \frac{k+1}{k} p_0$$

Продифференцируем это уравнение по объёму:

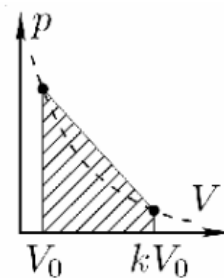
$$\frac{dp}{dV} + \frac{p_0}{kV_0} = 0$$

Найдём объём и давление гелия в состоянии, где его температура максимальна. Для этого продифференцируем уравнение состояния ($pV = \nu RT$) по объёму:

$$V \frac{dp}{dV} + p = \nu R \frac{dT}{dV}$$

Из трёх предыдущих уравнений найдём:

$$V_{\text{max}} = V_0 \frac{k+1}{2}, \quad p_{\text{max}} = p_0 \frac{k+1}{2}.$$



4 задача

После замыкания ключа в катушке индуктивности возникнет ЭДС индукции, равная $LdI/dt = U$. Следовательно, $LdI = Udt$. Так как все элементы цепи можно считать идеальными, а в момент замыкания ключа ток по цепи не протекал, можно записать $L(I_K - 0) = Ut$. Отсюда

$$I_K = \frac{U}{L} \tau$$

За время τ через резистор протечёт заряд

$$q_1 = I_R \tau = \frac{U}{R} \tau$$

После размыкания ключа сила тока в цепи будет изменяться по закону $LdI/dt = IR$, то есть $LdI = RIdt = Rdq$. За время переходного процесса сила тока в цепи упадёт от I_K до 0, а через резистор протечёт заряд

$$q_2 = \frac{L I_K}{R}$$

Из первого и третьего уравнений следует:

$$\tau = \frac{q_2 R}{U} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ с.}$$

Подставив найденное время τ во второе уравнение, получим:

$$q_1 = I_R \tau = \frac{U}{R} \frac{q_2 R}{U} = q_2 = 9 \text{ мкКл.}$$

5 задача

Согласно теореме о равенстве углов со взаимно перпендикулярными сторонами угол падения равен половинному углу при вершине полый призмы: $\phi_1 = a/2$, а угол преломления равен углу при вершине полый призмы: $\phi_2 = a$.

По закону Снелла $n \sin \phi_1 = \sin \phi_2$, и после соответствующей подстановки получим

$$n \sin a/2 = \sin a$$

Воспользуемся тригонометрической формулой $\sin a = 2 \sin(a/2) \cos(a/2)$.

Тогда получим:

$$n = 2 \cos a/2$$

По физическому смыслу задачи $0 < a < \pi/2$. С учётом этого неравенства получаем:

$$\sqrt{2} < n < 2$$

Примечание: Можно обойтись и без тождества для синуса двойного угла (которое не проходят в восьмом классе). Пуская боковая сторона призмы равна 1. Тогда выразив из закона Снелла коэффициент преломления, получим что он равен отношению длины высоты, опущенной к боковой стороне равнобедренного треугольника, к половине основания этого треугольника. Учитывая, что по физическим соображениям угол при вершине не может быть больше 90 градусов, приходим к таким же значениям для показателя преломления.

