11 класс (Решения)

Задача 1.

Размерность скорости света – м/с. Заметив, что Н = кг·м/с^2, а Дж = кг·м^2/с^2, получим соответствующую размерность для гравитационной постоянной кг^3/(м·с^2) и постоянной Планка кг·м^2/с.

Найдём размерность комбинации $x = c^\alpha G^\beta \hbar^\gamma$:

$$[x] = \left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)^\alpha \left(\frac{\text{м}^3}{\text{кг}\cdot\text{с}^2}\right)^\beta \left(\frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}}\right)^\gamma = \text{м}^{\alpha+3\beta+2\gamma}\text{с}^{-\alpha-2\beta-\gamma}\text{кг}^{-\beta+\gamma}$$

Для l_P имеем:

$$\begin{cases} \alpha_l + 3\beta_l + 2\gamma_l = 1, \\ -\alpha_l - 2\beta_l - \gamma_l = 0, \\ -\beta_l + \gamma_l = 0, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} \alpha_l = -\dfrac{3}{2}, \\ \beta_l = \dfrac{1}{2}, \\ \gamma_l = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Отсюда

$$l_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 1,6\cdot 10^{-35}\,\text{м}.$$

Для t_P:

$$\begin{cases} \alpha_t + 3\beta_t + 2\gamma_t = 0, \\ -\alpha_t - 2\beta_t - \gamma_t = 1, \\ -\beta_t + \gamma_t = 0, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} \alpha_t = -\dfrac{5}{2}, \\ \beta_t = \dfrac{1}{2}, \\ \gamma_t = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Отсюда

$$t_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} \approx 10^{-44}\,\text{с}.$$

Отметим, что можно было не решать систему, а сразу заметить, что $t_P = l_P/c$.

Для m_P:

$$\begin{cases} \alpha_m + 3\beta_m + 2\gamma_m = 0, \\ -\alpha_m - 2\beta_m - \gamma_m = 0, \\ -\beta_m + \gamma_m = 1, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} \alpha_m = \dfrac{1}{2}, \\ \beta_m = -\dfrac{1}{2}, \\ \gamma_m = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

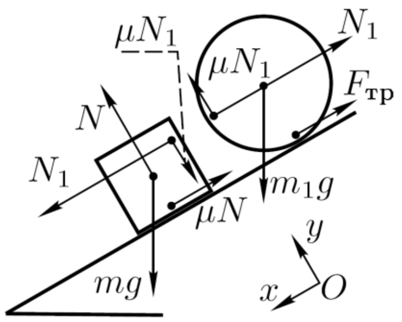
Отсюда $m_P = \sqrt{\dfrac{c\hbar}{G}} \approx 2,1\cdot 10^{-8}$ кг.

$$\underline{\text{Ответ}}.\ m_P = \sqrt{\frac{c\hbar}{G}} \approx 2{,}1\cdot 10^{-8}\ \text{кг}. \quad t_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} \approx 10^{-44}\ \text{с}.$$

$$l_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 1{,}6\cdot 10^{-35}\ \text{м}.$$

Задача 2.

Решение



Направим ось Ox вдоль наклонной плоскости сверху вниз, а ось Oy – перпендикулярно ей вверх (рис. 20). В проекции на оси Ox и Oy сумма сил, действующих на кубик равна 0:

$$mg\sin\alpha + N_1 - \mu N = 0,$$

$$N - mg\cos\alpha - \mu N_1 = 0.$$

Из данной системы можем найти N_1:

$$N_1 = \frac{\mu - \operatorname{tg}\alpha}{1-\mu^2}\, mg\cos\alpha.$$

Для цилиндра в проекции на ось Ox сумма сил равна:

$$m_1 g\sin\alpha - N_1 - F_{\text{ðð}} = 0.$$

Так как цилиндр не вращается, сумма моментов сил, действующих на него, равна 0. В качестве полюса, относительно которого заданы моменты, удобно принять ось цилиндра:

$$F_{\text{ðð}} R - \mu N_1 R = 0.$$

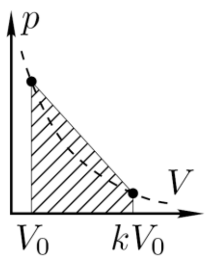
Зная $F_{\text{тр}} = \mu N_1$ и саму силу N_1, находим

$$M_{\max} = \frac{\mu\operatorname{ctg}\alpha - 1}{1-\mu}\, m.$$

<u>Ответ.</u> $M_{\max} = \dfrac{\mu\operatorname{ctg}\alpha - 1}{1-\mu}\, m.$

Задача 3.

Решение



Пусть в начальном состоянии объем гелия Y_0, давление p_0, а температура T_0. По условию конечный объем Y_1. Так как начальная и конечная температуры газа равны, из уравнения состояния найдём конечное давление: $p_1 = p_0/k$.

Работа, совершённая газом в указанном процессе, численно равна площади под графиком :

$$A = \frac{1}{2}\left(p_0 + \frac{p_0}{k}\right)(kV_0 - V_0) = \frac{p_0 V_0}{2k}(k^2 - 1).$$

Запишем уравнение процесса расширения гелия:

$$\frac{p_0 - p}{V - V_0} = \frac{p_0 - p_1}{kV_0 - V_0} = \frac{1}{k}\frac{p_0}{V_0}.$$

Перепишем его в виде:

$$p + V\frac{p_0}{kV_0} = \frac{k+1}{k}\, p_0. \qquad (2)$$

Продифференцируем это уравнение по объёму:

$$\frac{dp}{dV} + \frac{p_0}{kV_0} = 0. \qquad (3)$$

Найдём объём и давление гелия в состоянии, где его температура максимальна. Для этого продифференцируем уравнение состояния ($pY = \nu RT$) по объёму:

$$V\frac{dp}{dV} + p = \nu R\frac{dT}{dV}. \qquad (4)$$

Из (2), (3) и (4) найдём:

$$V_{\max} = V_0\frac{k+1}{2}, \qquad p_{\max} = p_0\frac{k+1}{2}.$$

Запишем уравнения Менделеева-Клапейрона для начального состояния и состояния, в котором температура гелия максимальна и равна $T_0 + \Delta T$:

$$p_0V_0 = \nu RT_0, \qquad p_{\max}V_{\max} = \frac{p_0V_0}{k}\left(\frac{k+1}{2}\right)^2 = \nu R(T+\Delta T).$$

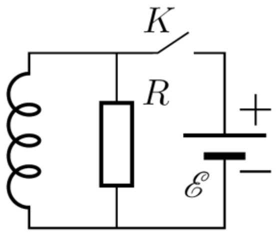
Из этих двух уравнений найдём

$$\nu R\Delta T = p_0V_0\left(\frac{1}{k}\left(\frac{k+1}{2}\right)^2 - 1\right) = \frac{p_0V_0}{4k}(k-1)^2.$$

С учётом последнего уравнения, выражение для работы примет вид:

$$A = 2\nu R\Delta T\left(\frac{k+1}{k-1}\right).$$

<u>Ответ</u>. $A = 2\nu R\Delta T\left(\dfrac{k+1}{k-1}\right).$



Задача 4.

Решение

После замыкания ключа в катушке индуктивности возникнет ЭДС индукции, равная $LdI/dt = U$. Следовательно, $LdI = Udt$. Так как все элементы цепи можно считать идеальными, а в момент замыкания ключа ток по цепи не протекал, можно записать $L(I_K - 0) = U\tau$. Отсюда

$$I_K = \frac{U}{L}\tau. \qquad (5)$$

За время τ через резистор протечёт заряд

$$q_1 = I_R\tau = \frac{U}{R}\tau. \qquad (6)$$

После размыкания ключа сила тока в цепи будет изменяться по закону $LdI/dt = IR$, то есть $LdI = RIdt = Rdq$. За время переходного процесса сила тока в цепи упадёт от I_K до 0, а через резистор протечёт заряд

$$q_2 = \frac{LI_K}{R}. \qquad (7)$$

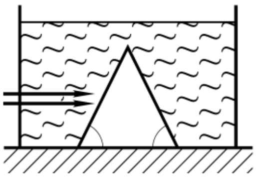
Из уравнений (5) и (7) следует:

$$\tau = \frac{q_2R}{U} = 5\cdot10^{-4}\text{ с}.$$

Подставив найденное время τ в уравнение (6), получим:

$$q_1 = I_R\tau = \frac{U}{R}\frac{q_2R}{U} = q_2 = 9\text{ мкКл}.$$

Ответ. $q_1 = I_R\tau = \dfrac{U}{R}\dfrac{q_2R}{U} = q_2 = 9\text{ мкКл}.$



Задача 5.

Решение

Согласно теореме о равенстве углов со взаимно перпендикулярными сторонами угол падения равен половинному углу при вершине полой призмы: $\varphi_1 = \alpha/2$, а угол преломления равен углу при вершине полой призмы: $\varphi_2 = \alpha$.

По закону Снелла $n\sin\varphi_1 = \sin\varphi_2$, и после соответствующей подстановки получим

$$n\sin\frac{\alpha}{2} = \sin\alpha.$$

Воспользуемся тригонометрической формулой $\sin\alpha = 2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)$.

Тогда получим:

$$n = 2\cos\frac{\alpha}{2}.$$

По физическому смыслу задачи $0 < \alpha < \pi/2$. С учётом этого неравенства получаем:

$$\sqrt{2} < n < 2.$$

Ответ. $\sqrt{2} < n < 2$.