Ахметшина Илюза Азаматовна, ученица 11 класса, МОБУ
Башкирская гимназия №9 им. К. Арсланова.

№1

$$U = a((\sin x)^6 + (\cos x)^6) + b((\sin x)^4 + (\cos x)^4) + 6(\sin x)^2(\cos x)^2$$

не зависит от x?

Решение:

1) упростим.

$$a((\sin x)^6 + (\cos x)^6) = a((\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3) =$$

$$= a(\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1})((\sin^2 x)^2 - \sin^2 x \cdot \cos^2 x + (\cos^2 x)^2) =$$

$$= a((\sin^2 x)^2 + 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x + (\cos^2 x)^2 - 3\sin^2 \cos^2 x) =$$

$$= a((\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - \frac{3}{4}(2\sin x \cdot \cos x)^2) =$$

$$= a(1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x)$$

2) упростим:

$$b((\sin x)^4 + (\cos x)^4) = b((\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x) =$$

$$= b(1 - (\sqrt{2}\sin x \cos x)^2 = b(1 - (\sqrt{2}(\frac{\sin 2x}{2}))^2) =$$

$$= b(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x) = b(\frac{2 - \sin^2 2x}{2}) =$$

$$= b(\frac{3 + \cos 2x}{4})$$

3) упростим

$$6(\sin x)^2(\cos x)^2 = 6(\frac{1}{4} \cdot (2\sin x \cos x)^2) =$$

$$= 6(\frac{1}{4}\sin^2 2x) = \frac{3}{2}\sin^2 2x$$

4) Получим:

$$U = a(1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x) + b(\frac{3 + \cos 2x}{4}) + \frac{3}{2}(\sin^2 2x) =$$

$$= a(1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x) + b(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x) + \frac{3}{2}(\sin^2 2x) =$$

$$= a - a(\frac{3}{4}\sin^2 2x) + b - \frac{b}{2}(\sin^2 2x) + \frac{3}{2}\sin^2 x \quad \cancel{(\frac{3}{2}\sin^2 2x)}$$ — не зависит

от x, если:

$$a \cdot (\frac{3}{4}\sin^2 2x) - \frac{b}{2}(\sin^2 2x) + \frac{3}{2}\sin^2 2x = 0$$

$$\sin^2 2x(\frac{3}{4}a - \frac{b}{2} + \frac{3}{2}) = 0$$

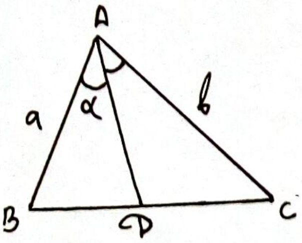
$$\frac{3}{4}a - \frac{b}{2} + \frac{3}{2} = 0 \quad | \cdot 4$$

$$3a - 2b + 6 = 0$$
$$3a = -6 + 2b$$
$$a = -2 + \frac{2}{3}b$$

Значит урав-ие не зависит от x только в соотношении
$$a = -2 + \frac{2}{3}b$$

Ответ: $a = -2 + \frac{2}{3}b$

№2



Дано: $AB = a$
$AC = b$
$AD = l$ – бис-са угла $\angle A$

Найти: S_Δ

Решение:

1) Выразим биссектрису AD:

$$AD = \frac{2ab}{a+b} \cdot \cos\frac{A}{2}$$

2) обозначим $\angle BAD = \alpha$

3) $AD = \frac{2ab}{a+b} \cdot \cos\alpha$;

$$l = \frac{2ab}{a+b} \cdot \cos\alpha;$$

$$\cos\alpha = \frac{l(a+b)}{2ab};$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{l^2(a+b)^2}{4a^2b^2}} = \frac{\sqrt{4a^2b^2 - l^2(a+b)^2}}{2ab}$$

$$\sin\angle A = \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha =$$
$$= 2 \cdot \frac{\sqrt{4a^2b^2 - l^2(a+b)^2}}{2ab} \cdot \frac{l(a+b)}{2ab} = \frac{l(a+b)\cdot\sqrt{4a^2b^2 - l^2(a+b)^2}}{2a^2b^2}$$

4) $S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\angle A =$

$$= \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \frac{l(a+b)\cdot\sqrt{4a^2b^2 - l^2(a+b)^2}}{2a^2b^2} =$$

$$= \frac{l(a+b)\sqrt{4a^2b^2 - l^2(a+b)^2}}{4ab}$$

Ответ: $\frac{l(a+b)\sqrt{4a^2b^2 - l^2(a+b)^2}}{4ab}$