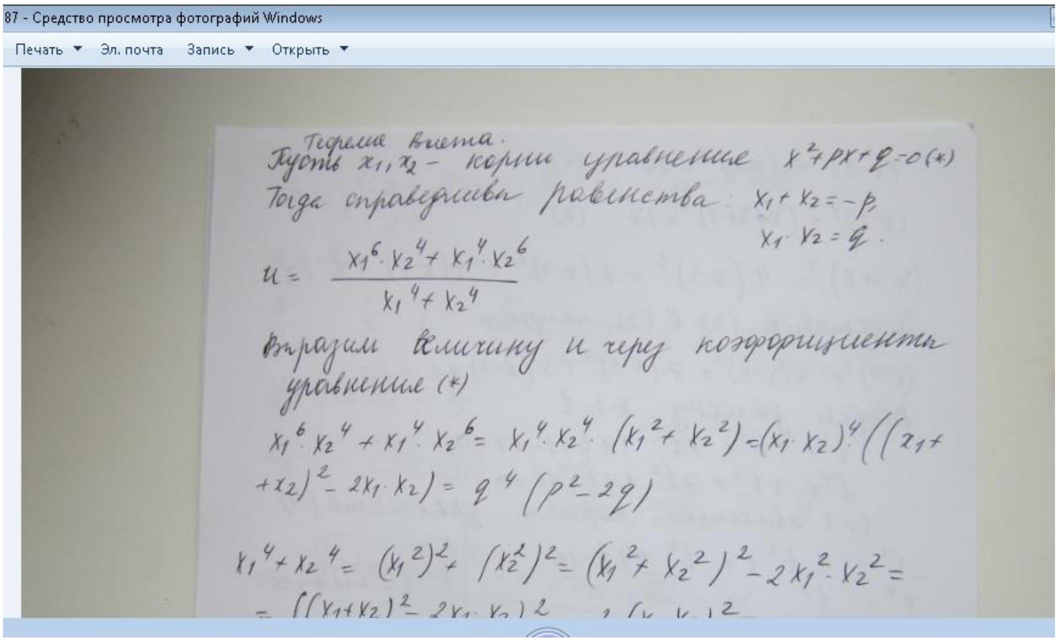
1. Выразить величину $u = \frac{x_1^6 x_2^4 + x_1^4 x_2^6}{x_1^4 + x_2^4}$ через коэффициенты уравнения $x^2 + px + q = 0$, если x_1 и x_2 есть его корни.



Теорема Виета.

Пусть x_1, x_2 – корни уравнения $x^2+px+q=0$ (*)

Тогда справедливы равенства $x_1+x_2=-p$

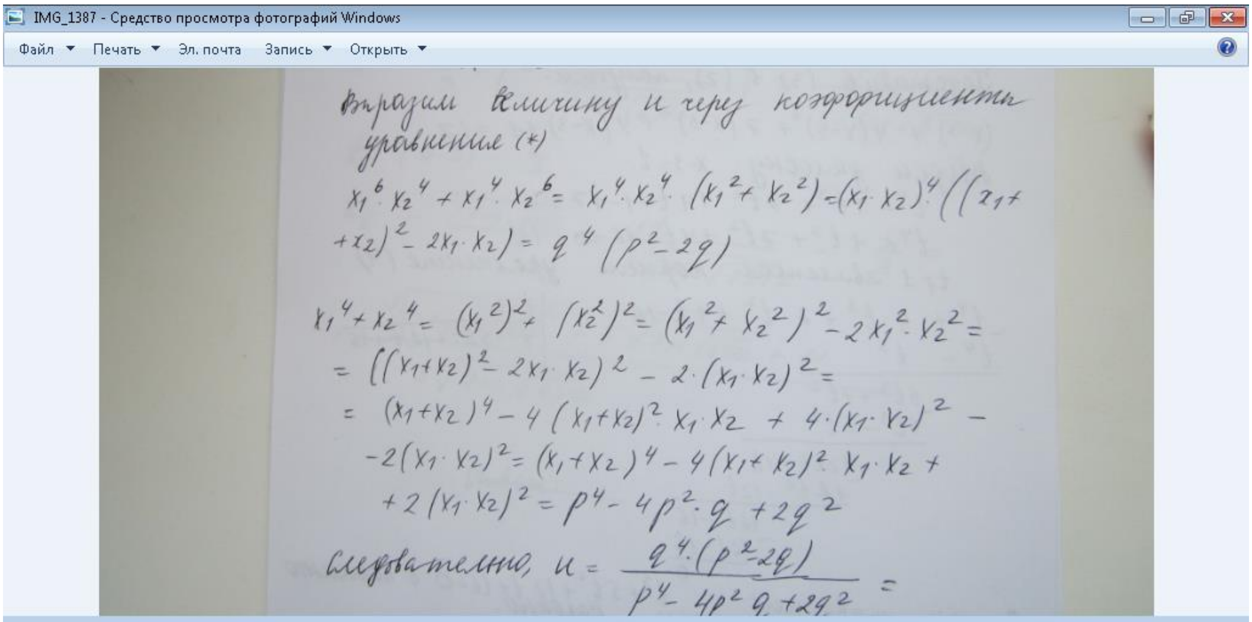
$x_1\cdot x_2=q$.

$$u = \frac{x_1^6\cdot x_2^4 + x_1^4\cdot x_2^6}{x_1^4+x_2^4}$$

Выразим величину u через коэффициенты уравнения (*)

$$x_1^6\cdot x_2^4 + x_1^4\cdot x_2^6 = x_1^4\cdot x_2^4\cdot(x_1^2+x_2^2) = (x_1\cdot x_2)^4((x_1+x_2)^2 - 2x_1\cdot x_2) = q^4(p^2-2q)$$

$$x_1^4+x_2^4 = (x_1^2)^2+(x_2^2)^2 = (x_1^2+x_2^2)^2 - 2x_1^2\cdot x_2^2 =$$



Выразим величину u через коэффициенты уравнения (*)

$$x_1^6\cdot x_2^4 + x_1^4\cdot x_2^6 = x_1^4\cdot x_2^4\cdot(x_1^2+x_2^2) = (x_1\cdot x_2)^4((x_1+x_2)^2 - 2x_1\cdot x_2) = q^4(p^2-2q)$$

$$x_1^4+x_2^4 = (x_1^2)^2+(x_2^2)^2 = (x_1^2+x_2^2)^2 - 2x_1^2\cdot x_2^2 =$$

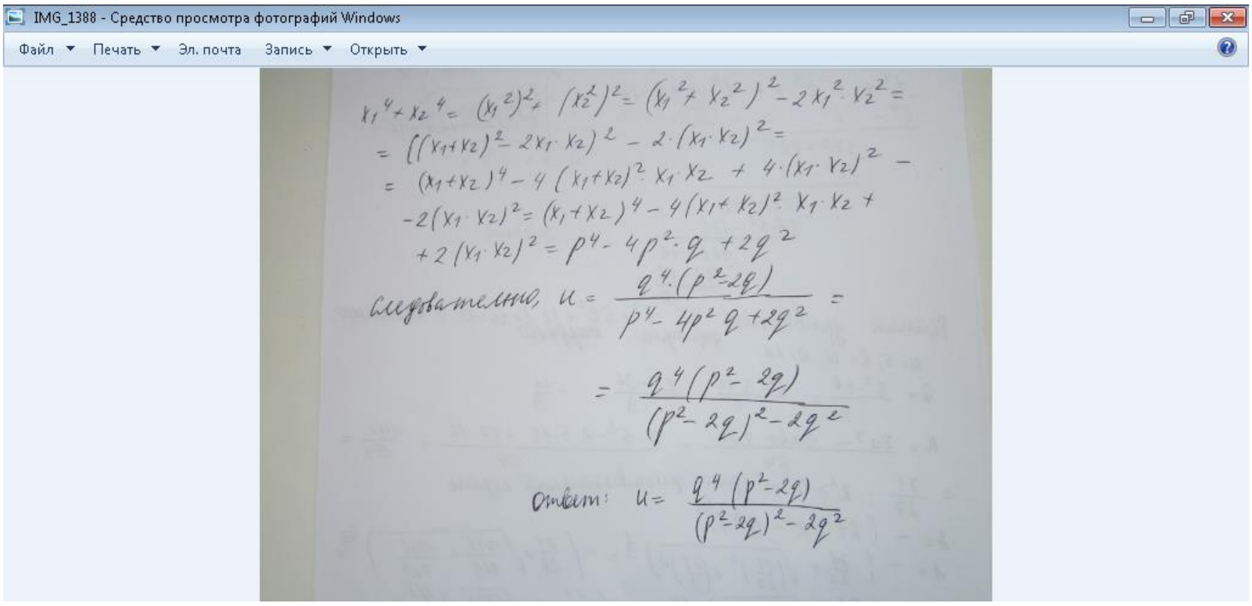
$$= ((x_1+x_2)^2 - 2x_1\cdot x_2)^2 - 2\cdot(x_1\cdot x_2)^2 =$$

$$= (x_1+x_2)^4 - 4(x_1+x_2)^2\cdot x_1\cdot x_2 + 4\cdot(x_1\cdot x_2)^2 -$$

$$-2(x_1\cdot x_2)^2 = (x_1+x_2)^4 - 4(x_1+x_2)^2\cdot x_1\cdot x_2 +$$

$$+2(x_1\cdot x_2)^2 = p^4 - 4p^2\cdot q + 2q^2$$

Следовательно, $u = \frac{q^4\cdot(p^2-2q)}{p^4-4p^2q+2q^2} =$



$$x_1^4+x_2^4=(x_1^2)^2+(x_2^2)^2=(x_1^2+x_2^2)^2-2x_1^2\cdot x_2^2=$$
$$=\left((x_1+x_2)^2-2x_1\cdot x_2\right)^2-2\cdot(x_1\cdot x_2)^2=$$
$$=(x_1+x_2)^4-4(x_1+x_2)^2\cdot x_1\cdot x_2+4\cdot(x_1\cdot x_2)^2-$$
$$-2(x_1\cdot x_2)^2=(x_1+x_2)^4-4(x_1+x_2)^2\cdot x_1\cdot x_2+$$
$$+2(x_1\cdot x_2)^2=p^4-4p^2\cdot q+2q^2$$

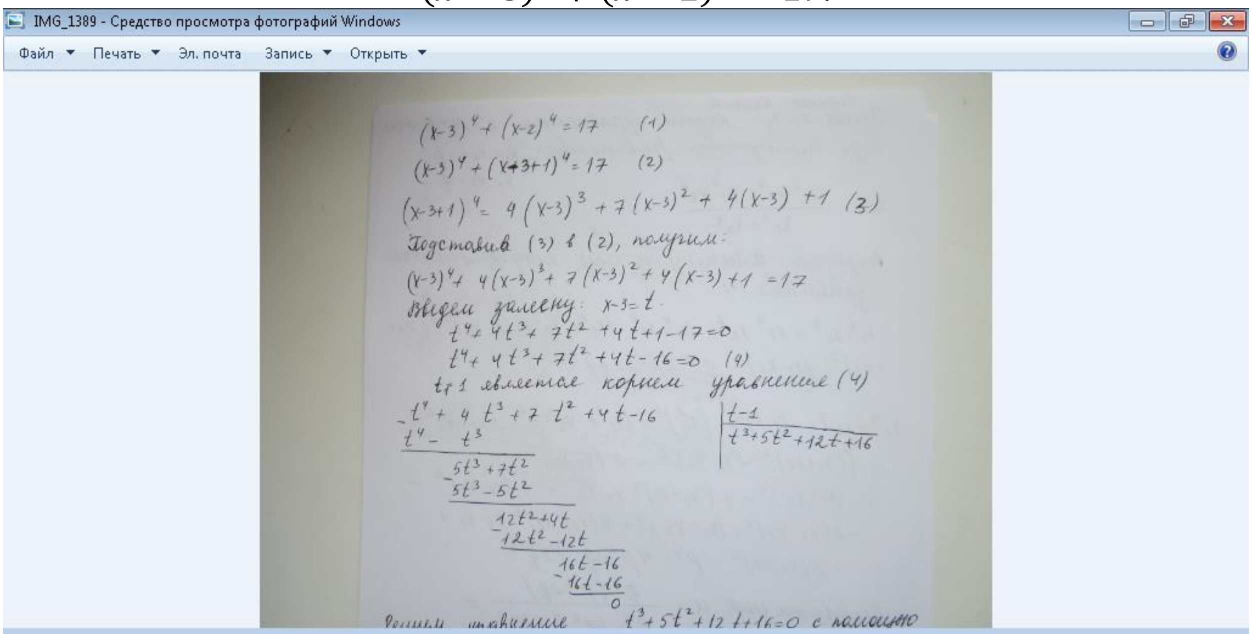
следовательно, $u=\dfrac{q^4\cdot(p^2-2q)}{p^4-4p^2q+2q^2}=$

$$=\frac{q^4(p^2-2q)}{(p^2-2q)^2-2q^2}$$

Ответ: $u=\dfrac{q^4(p^2-2q)}{(p^2-2q)^2-2q^2}$

2. Найти действительные корни уравнения:

$$(x-3)^4+(x-2)^4=17.$$



$(x-3)^4+(x-2)^4=17$ (1)

$(x-3)^4+(x-3+1)^4=17$ (2)

$(x-3+1)^4=4(x-3)^3+7(x-3)^2+4(x-3)+1$ (3)

Подставив (3) в (2), получим:

$(x-3)^4+4(x-3)^3+7(x-3)^2+4(x-3)+1=17$

Введем замену: $x-3=t$

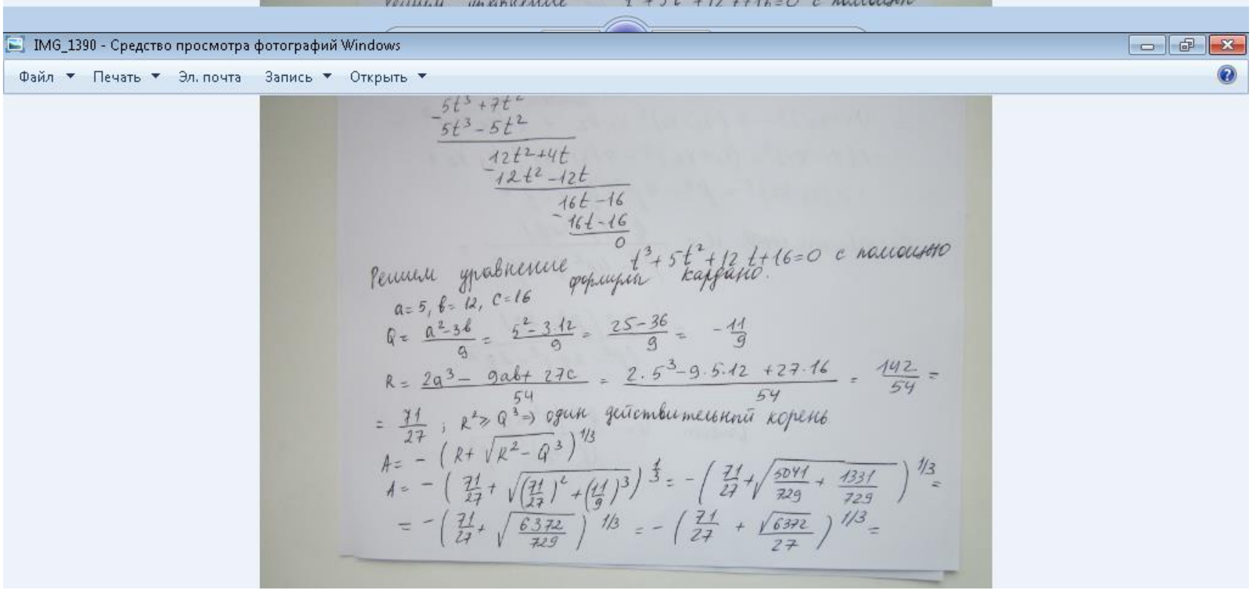
$t^4+4t^3+7t^2+4t+1-17=0$

$t^4+4t^3+7t^2+4t-16=0$ (4)

$t=1$ является корнем уравнения (4)

$$\begin{array}{l|l} t^4+4t^3+7t^2+4t-16 & t-1 \\ \underline{t^4-t^3} & t^3+5t^2+12t+16 \\ \quad 5t^3+7t^2 & \\ \quad \underline{5t^3-5t^2} & \\ \qquad 12t^2+4t & \\ \qquad \underline{12t^2-12t} & \\ \qquad\quad 16t-16 & \\ \qquad\quad \underline{16t-16} & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

Решим уравнение $t^3+5t^2+12t+16=0$ с помощью



$$\begin{array}{l} 5t^3+7t^2 \\ \underline{5t^3-5t^2} \\ \quad 12t^2+4t \\ \quad \underline{12t^2-12t} \\ \qquad 16t-16 \\ \qquad \underline{16t-16} \\ \qquad\quad 0 \end{array}$$

Решим уравнение $t^3+5t^2+12t+16=0$ с помощью формулы Кардано.

$a=5,\ b=12,\ c=16$

$Q=\dfrac{a^2-3b}{9}=\dfrac{5^2-3\cdot12}{9}=\dfrac{25-36}{9}=-\dfrac{11}{9}$

$R=\dfrac{2a^3-9ab+27c}{54}=\dfrac{2\cdot5^3-9\cdot5\cdot12+27\cdot16}{54}=\dfrac{142}{54}=$

$=\dfrac{71}{27}$; $R^2\geq Q^3\Rightarrow$ один действительный корень

$A=-\left(R+\sqrt{R^2-Q^3}\right)^{1/3}$

$A=-\left(\dfrac{71}{27}+\sqrt{\left(\dfrac{71}{27}\right)^2+\left(\dfrac{11}{9}\right)^3}\right)^{\frac{1}{3}}=-\left(\dfrac{71}{27}+\sqrt{\dfrac{5041}{729}+\dfrac{1331}{729}}\right)^{1/3}=$

$=-\left(\dfrac{71}{27}+\sqrt{\dfrac{6372}{729}}\right)^{1/3}=-\left(\dfrac{71}{27}+\dfrac{\sqrt{6372}}{27}\right)^{1/3}=$

$$= -\left(\frac{71+\sqrt{6372}}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = -\frac{\sqrt[3]{71+\sqrt{6372}}}{3}$$

$$B = \frac{Q}{A}$$

$$B = -\frac{11}{\cancel{9}\ 3}\cdot\left(-\frac{\cancel{3}}{\sqrt[3]{71+\sqrt{6372}}}\right) = \frac{11}{3\sqrt[3]{71+\sqrt{6372}}}$$

$$t_2 = (A-B) - \frac{a}{3}$$

$$t_2 = -\frac{\sqrt[3]{71+\sqrt{6372}}}{3} - \frac{11}{3\sqrt[3]{71+\sqrt{6372}}} - \frac{5}{3} =$$

$$= -\frac{\sqrt[3]{(71+\sqrt{6372})^2} + 5\sqrt[3]{71+\sqrt{6372}} + 11}{3\sqrt[3]{71+\sqrt{6372}}}$$

1) $x-3 = t_1$

$x-3 = 1$

$x = 4.$

2) $x-3 = t_2$

$$x-3 = -\frac{\sqrt[3]{(71+\sqrt{6372})^2} + 5\sqrt[3]{71+\sqrt{6372}} + 11}{3\sqrt[3]{71+\sqrt{6372}}}$$

$$x = 3 - \frac{\sqrt[3]{(71+\sqrt{6372})^2} + 5\sqrt[3]{71+\sqrt{6372}} + 11}{3\sqrt[3]{71+\sqrt{6372}}}$$

$$x = \frac{-\sqrt[3]{(71+\sqrt{6372})^2} + 4\sqrt[3]{71+\sqrt{6372}} - 11}{}$$

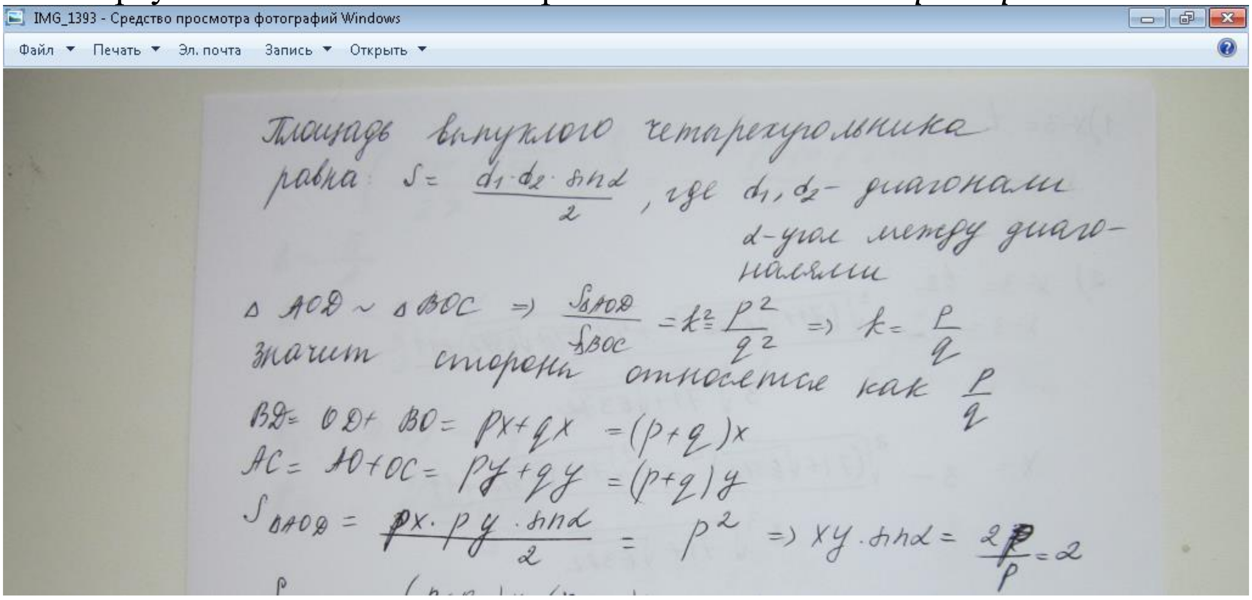
IMG_1392 - Средство просмотра фотографий Windows
Файл Печать Эл. почта Запись Открыть

$$x = 3 - \frac{\sqrt[3]{(71+\sqrt{6372})^2} + 5\sqrt[3]{71+\sqrt{6372}} + 11}{3\sqrt[3]{71+\sqrt{6372}}}$$

$$x = \frac{-\sqrt[3]{(71+\sqrt{6372})^2} + 4\sqrt[3]{71+\sqrt{6372}} - 11}{3\sqrt[3]{71+\sqrt{6372}}}$$

Ответ: $4;\quad \dfrac{-\sqrt[3]{(71+\sqrt{6372})^2} + 4\sqrt[3]{71+\sqrt{6372}} - 11}{3\sqrt[3]{71+\sqrt{6372}}}$

3. В трапеции $ABCD$ стороны BC и AD параллельны, O – точка пересечения диагоналей. Найти площадь трапеции, если площади треугольников AOD и BOC равны соответственно p^2 и q^2.



Площадь выпуклого четырехугольника равна $S=\frac{d_1\cdot d_2\cdot\sin\alpha}{2}$, где d_1, d_2 – диагонали, α – угол между диагоналями

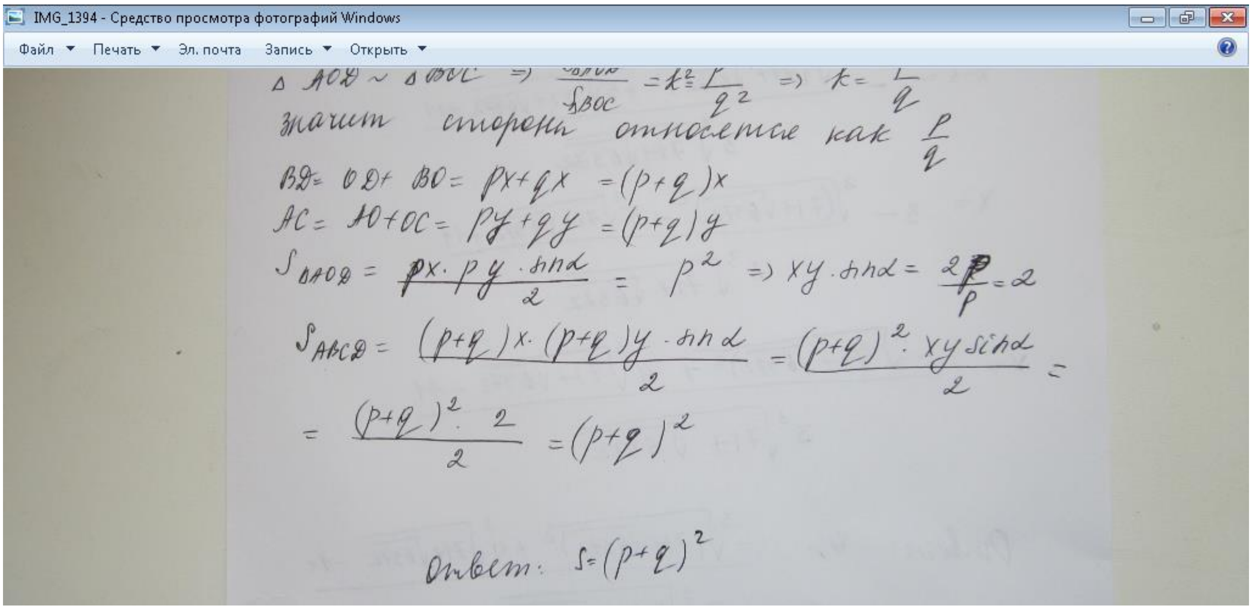
$\triangle AOD \sim \triangle BOC \Rightarrow \frac{S_{\triangle AOD}}{S_{BOC}} = k^2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow k = \frac{p}{q}$

значит стороны относятся как $\frac{p}{q}$

$BD = OD + BO = px + qx = (p+q)x$

$AC = AO + OC = py + qy = (p+q)y$

$S_{\triangle AOD} = \frac{px\cdot py\cdot\sin\alpha}{2} = p^2 \Rightarrow xy\cdot\sin\alpha = \frac{2\cancel{p}}{p} = 2$



$\triangle AOD \sim \triangle BOC \Rightarrow \frac{S_{\triangle AOD}}{S_{BOC}} = k^2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow k = \frac{p}{q}$

значит стороны относятся как $\frac{p}{q}$

$BD = OD + BO = px + qx = (p+q)x$

$AC = AO + OC = py + qy = (p+q)y$

$S_{\triangle AOD} = \frac{px\cdot py\cdot\sin\alpha}{2} = p^2 \Rightarrow xy\cdot\sin\alpha = \frac{2\cancel{p}}{p} = 2$

$S_{ABCD} = \frac{(p+q)x\cdot(p+q)y\cdot\sin\alpha}{2} = \frac{(p+q)^2\cdot xy\sin\alpha}{2} =$

$= \frac{(p+q)^2\cdot 2}{2} = (p+q)^2$

Ответ: $S = (p+q)^2$