

№1 $x + \sqrt{2}$ и $x^3 + \sqrt{2}$ - рациональные числа существуют ли x ?

Решение: 1) Пусть такое число x существует. Тогда $x + \sqrt{2} = p$ - рациональное число.

2) $x + \sqrt{2} = p$

$x = p - \sqrt{2}$. Проверим, является ли при таком значении x значение выражения $x^3 + \sqrt{2}$ рациональным числом.

$$\begin{aligned} x^3 + \sqrt{2} &= (p - \sqrt{2})^3 + \sqrt{2} = p^3 - 3p^2\sqrt{2} + 3p(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2})^3 + \sqrt{2} = \\ &= p^3 - 3\sqrt{2}p^2 + 6p - 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = p^3 - 3\sqrt{2}p^2 + 6p - \sqrt{2} = \\ &= p^3 + 6p - (3p^2 + 1)\sqrt{2} \end{aligned}$$

Полученное число является рациональным, если $3p^2 + 1 = 0$. Но этого не может быть, так как $3p^2 + 1 > 0$ при любых рациональных p .

Значит, такого x , что значения выражений $x + \sqrt{2}$ и $x^3 + \sqrt{2}$ - рациональные числа, не существует.

Ответ: не существует.

№2

Решение: 1) Всего 10 досок и 3 банки с разными красками. Допустим

1 краска - красный

2 краска - синий

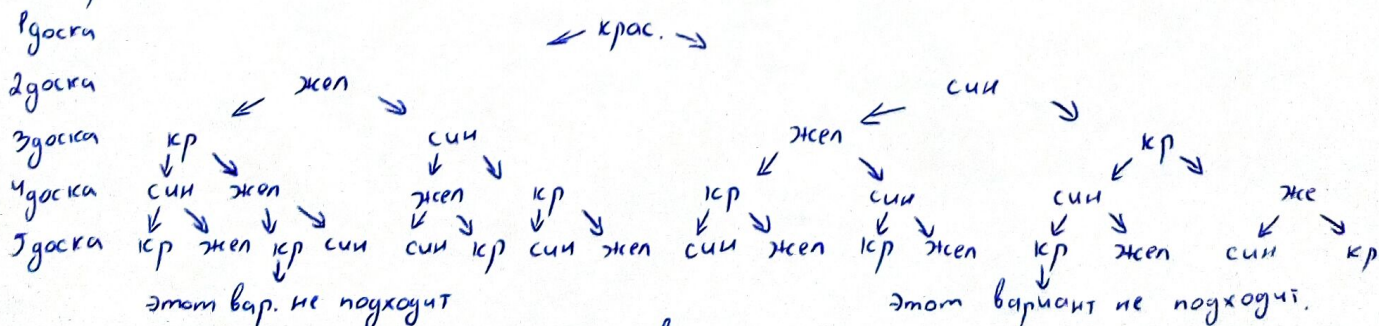
3 краска - желтый

2) Первая доска может быть покрашена в одну из трех цветов. (пусть красная).

Вторая доска может быть покрашена в одну из двух цветов, но только не красной. (пусть синей). Третья доска тоже может быть покрашена в одну из двух цветов, но только не синей (пусть желтой). И такая операция происходит еще 7 раз. Значит таких досок, где выбирают среди двух цветов, 9 штук.

3) Тогда $3 \cdot 2^9$ - это число вариантов, которыми можно покрасить забор. Но в эти числа вошли и способы покраски забора в два цвета. Их всего 6 вариантов. Так как первую доску можно покрасить тремя способами, а 2-ую двумя, далее покраска определяется однозначно $3 \cdot 2 = 6$.

Докажу это на примере 5 досок ~~а~~ используя "дерево возможных вариантов".



для синего и для желтого варианта тоже будут выходить по 2.

4) ~~Значит при красном~~

Тогда $3 \cdot 2^9 - 6 = 1536 - 6 = 1530$ вариантов

Ответ: 1530.