

1. Когда шар перестает давить на дно сосуда, на него действуют силы, уравновешивающие друг друга: сила тяжести $F_{\text{тяж}}$ и архимедова сила F_A . По закону Архимеда $F_A = r_1 g V_1$, где V_1 - объем погруженной в жидкость части шара, r_1 - плотность воды. Сила тяжести $F_{\text{тяж}} = r_2 g V_2$, где V_2 - объем всего шара, r_2 - его плотность.

Учитывая, что, по условию, $F_A = F_{\text{тяж}}$ и $\frac{r_2}{r_1} = 0,5$, находим, что $V_1 = 0,5V_2$. Это означает, что шар погружен в воду наполовину. Другими словами, высота столба жидкости в сосуде $h = r$. После этого объем воды V , налитой в сосуд, определяется чисто геометрически: из объема цилиндра радиусом R и высотой h вычитаем объем полушария радиусом r :

$$V = \pi R^2 h - \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right), \text{ где } h = r.$$

Окончательно получим

$$V = \pi r \left(R^2 - \frac{2}{3} r^2 \right) = 1,3 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

2. Направим координатную ось y вертикально вверх, начало отсчета поместим на уровне земли. Начальную скорость обозначим через v_0 . Координата y тела изменяется со временем t по закону

$$y(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Если тело оказывается в момент времени t на высоте h , то $y(t) = h$. Получаем уравнение относительно t :

$$h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

или

$$gt^2 - 2v_0 t + 2h = 0.$$

Решая последнее уравнение, находим корни t_1 и t_2 , при которых камень достигал высоты h . Разность этих времен составляет Δt . Итак,

$$t_1 = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g}, \quad t_2 = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g}$$

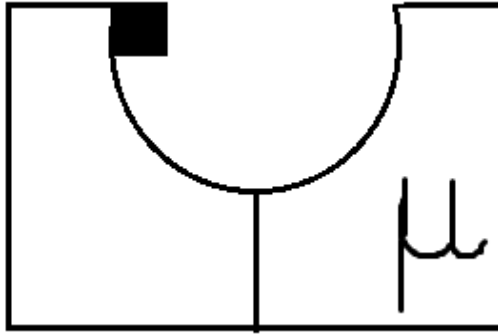
Интервал времени Δt между этими двумя моментами

$$\Delta t = \frac{2\sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g}.$$

Из последнего соотношения выразим искомую начальную скорость камня:

$$v_0 = \sqrt{\left(\frac{g\Delta t}{2} \right)^2 + 2gh}.$$

3.



В момент перехода на шероховатую поверхность кубик движется по окружности радиуса R со скоростью $V = \sqrt{2gR}$ (скорость можно найти из закона сохранения механической энергии). Ускорение кубика складывается из радиального a_n и касательного a_t :

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}.$$

Радиальное ускорение $a_n = \frac{v^2}{R} = 2g$.

Касательное ускорение вызвано действием силы трения

$$ma_t = F_{\text{тр}} = \mu N.$$

Так как в нижней точке

$$N - mg = m \frac{v^2}{R}, \quad N = 3mg \quad \text{и} \quad a_t = 3\mu g.$$

Откуда

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = g\sqrt{4 + 9\mu^2}.$$

4. В соответствии с законом Паскаля в первом случае давление во всех точках на глубине H одинаковое:

$$P_0 + \rho gH = P_1 + \rho g \frac{1}{n}H,$$

где P_1 - давление газа в стакане, ρ - плотность воды.

$$\text{Следовательно, } P_1 = P_0 + \rho gH \left(1 - \frac{1}{n}\right). \quad (1)$$

В первом случае на стакан, который находится в равновесии, действует сила атмосферного давления, сила тяжести, сила давления со стороны газа в стакане, то есть

$$\begin{aligned} P_0S + Mg &= P_1S; \\ Mg &= (P_1 - P_0)S = \rho gHS \left(1 - \frac{1}{n}\right). \end{aligned} \quad (2)$$

Считаем, что плотность стекла настолько превосходит плотность воды, что выталкивающей силой, действующей на объем, занятый стеклом, можно пренебречь по сравнению с силой давления воздуха.

Стакан, погруженный на глубину x не всплывает, если окажется, что сила давления воздуха на дно стакана снизу не превосходит суммы силы давления воды на дно сверху и силы тяжести стакана, то есть

$$\rho g \left(x - H + \frac{V}{S} \right) S \leq \rho g (x - H) S + Mg, \quad (3)$$

где V - объем воздуха в стакане на глубине x .

Из (2) и (3) находим, что

$$V \leq HS \frac{n-1}{n}. \quad (4)$$

На основе объединенного газового закона

$$\frac{PHS}{T_1} = \left[P_0 + \rho g \left(x - H + \frac{V}{S} \right) \right] \frac{V}{T_2}. \quad (5)$$

Исключая из соотношений (4) и (5) объем V , приходим к выражению

$$x \geq \frac{P_0}{\rho g} \left(\frac{n-1}{n} \cdot \frac{T_2}{T_1} - 1 \right) + \frac{H}{n}.$$

Следует помнить о том, что решение задачи имеет смысл, если выполняется неравенство

$$\frac{P_0}{\rho g} \left(\frac{n-1}{n} \cdot \frac{T_2}{T_1} - 1 \right) + \frac{H}{n} \geq H$$

В противном случае стакан сам утонет.

5. Изменение ΔT натяжения нити равно по модулю реактивной силе, возникающей при вытекании газа из шарика (изменением выталкивающей силы и веса шарика в начальный момент, пока изменение объема шарика мало, можно пренебречь).

За время Δt вытекает объем газа

$$V = S v \Delta t,$$

его масса

$$m = \rho S v \Delta t.$$

Следовательно, расход газа

$$\mu = \frac{m}{\Delta t} \rho S v$$

и реактивная сила

$$F_p = \Delta T = \rho S v^2.$$

6. Пусть начальное давление в верхней части P_1 , а в нижней P_2 , масса поршня m , площадь сечения цилиндра S . Тогда при равновесии поршня

$$P_2 - P_1 = \frac{mg}{S}. \quad (1)$$

После подогрева давления станут P'_1 и P'_2 соответственно, значит

$$P'_2 - P'_1 = \frac{mg}{S}. \quad (2)$$

Приравнивая выражения (1) и (2) и используя закон состояния для одного моля идеального газа в виде $P = \frac{RT}{V}$, получим

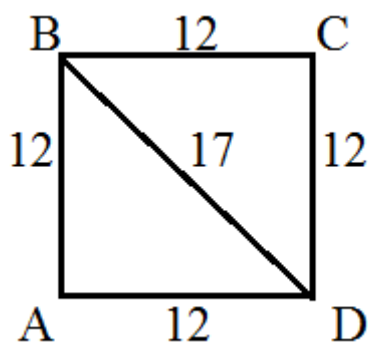
$$\frac{RT}{V_2} - \frac{RT}{V_1} = \frac{RT'}{V'_2} - \frac{RT'}{V'_1}. \quad (3)$$

Поскольку по условию $V_1 = 4V_2$, а $V'_1 = 2V'_2$, и в силу неизменности объема $V_1 + V_2 = V'_1 + V'_2$, получим $\frac{V_2}{V'_2} = \frac{3}{5}$ и

$$T' = T \cdot \frac{\left(\frac{1}{V'_2} - \frac{1}{V'_1}\right)}{\left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right)} = 2,5T. \quad (4)$$

Ответ. До температуры в два с половиной раза больше начальной.

7.



Длина проволоки равна сумме учетверенной длины стороны квадрата и длины диагонали:

$$L = 4a + \sqrt{2}a = a(4 + \sqrt{2}).$$

Следовательно, сопротивление одной стороны квадрата равно

$$r = \frac{R_0}{(4+\sqrt{2})} = \frac{65}{5,41} \text{ Ом} = 12 \text{ Ом}.$$

Сопротивление диагонали равно

$$r_1 = \sqrt{2}r \approx 17 \text{ Ом}.$$

Сопротивление между вершинами BD определим по формуле сопротивления при параллельном соединении трех резисторов:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{2r} + \frac{1}{2r} + \frac{1}{r_1} = \frac{2r_1+2r}{2rr_1} = \frac{r_1+r}{rr_1};$$

$$R_1 = \frac{rr_1}{r_1+r} = \frac{12 \cdot 17}{12+17} \text{ Ом} = 7 \text{ Ом}.$$

Сопротивление между двумя соседними вершинами квадрата (например, AB) как сопротивление параллельного соединения двух ветвей: первая ветвь – это сторона квадрата AB , вторая – AD последовательное соединение стороны квадрата AD с параллельным соединением диагонали и двух сторон BCD .

Сопротивление первой ветви

$$R_2' = 12 \text{ Ом.}$$

Сопротивление второй ветви

$$R_2'' = r + \frac{2r \cdot r_1}{2r_1 + r} = \left(12 + \frac{24 \cdot 17}{24 + 17}\right) \text{ Ом} \approx 22 \text{ Ом.}$$

Сопротивление между соседними вершинами

$$R_2 = \frac{R_2' \cdot R_2''}{R_2' + R_2''} = \frac{12 \cdot 22}{12 + 22} \text{ Ом} = 7,8 \text{ Ом} \approx 8 \text{ Ом.}$$