Решения заданий 11 класса

1 Обозначим m и M – массы бусинок, V_0 – искомая скорость, V – скорость маленькой бусинки перед соударением.

Спускается маленькая бусинка равноускоренно, поэтому спуск займет время $T = (V_0 - V)/g$, время между ударами при этом будет $2T$.

Если движением большой бусинки пренебречь, при соударении она играет для маленький бусинки роль стенки, так что получает от нее за удар импульс $P = 2mV$. Импульс, переданный в единицу времени, характиризует силу взаимодействия бусинок друг с другом. Чтобы верхняя бусинка покоилась, эта сила должна компенсировать Mg. В единицу времени верхней бусинке передасться импульс $P/(2T)$, поэтому

$$\frac{P}{2T} = Mg \qquad \Rightarrow \qquad \frac{2mVg}{2(V_0 - V)} = Mg \qquad \Rightarrow \qquad V = \frac{V_0 n}{n+1}.$$

Кроме того V и V_0 связаны законом сохранения энергии

$$mV_0^2/2 = mV^2/2 + mgH.$$

Решая последние два уравнения совместно, находим ответ.

Ответ: Скорость нижней бусинки у земли $V_0 = (n+1)\sqrt{2gH/(2n+1)} \simeq 31.5$ м/сек.

2 Пучть для определенности тазик едет влево. В состоянии равновесия, когда монета покоится относительно тазика, она движется с ускорением a. На нее действуют две силы: сила реакции опоры N, направленная перпендикулярно поверхности тазика в точке, где лежит монета, и сила тяжести mg. Значит, $m\vec{a} = \vec{N} + m\vec{g}$.

Учитывая, что ma в 2 раза больше чем mg, легко найти графически направление силы реакции опоры (см. рис. 59.а). Перпендикуляр к силе также легко восстанавливается.

Сила реакции опоры направлена перпендикулярно касательной к поверхности. Следовательно, надо найти точку профиля, касательная к которой будет перпендикулярна N. Это легко сделать параллельным переносом упомянутого перпендикуляра.

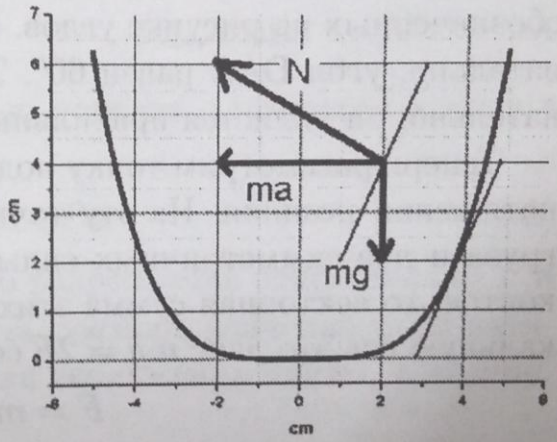

Рис. 59.а

Ответ: $z = 1.75 \pm 0.25$ см

3 При параллельном включении кипятильников, на каждом из них напряжение будет в 2 раза превышать то, на которое он рассчитан. Значит, мощность превысит расчетную мощность $P_0 = U^2/R$ в 4 раза и кипятильники перегорят. При последовательном включении кипятильников в розетку с напряжением $2U$, на каждом кипятильнике будет расчетное напряжение U, значит и мощность каждого кипятильника будет расчетная, и вместе они нагреют воду за время $t/2$.

Ответ: Воду можно вскипятить парой последовательно включенных кипятильников за 1.5 минуты.

4 Линии тока через аксон имеют достаточно сложную геометрию. Действительно, мало того, что ток течет вдоль сердцевины аксона как по проводу, потенциал одного конца которого ϕ, а другой (удаленный) конец имеет нулевой потенциал. Вдобавок, ток утекает через стенки трубки.

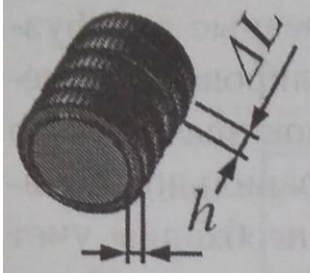

Рис. 195.a

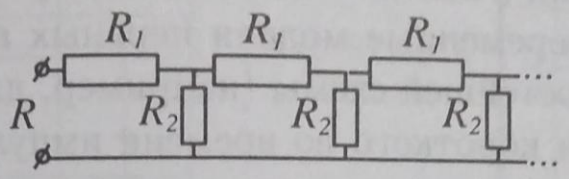

Рис. 195.b

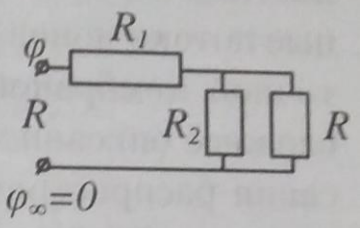

Рис. 195.c

Пусть, однако, эта утечка невелика (проводимость стенки аксона мала по сравнению с проводимостью раствора внутри трубки). Тогда оценку сопротивления можно получить, мысленно заменяя длинное непрерывное волокно бесконечной системой коротких ячеек (колец) со стремящейся к нулю толщиной ΔL. Каждой ячейке сопоставим "продольное" сопротивление сердцевины волокна и "поперечное" сопротивление утечки через мембрану (см. рис. 195.a).

"Продольное" сопротивление сердцевины кольца дается выражением $R_1 = \rho_0 \Delta L/(\pi r^2)$, ведь ток течет вдоль ΔL, поперек сечения трубки

πr^2. "Поперечное" сопротивление утечки определяется формулой $R_2 = \rho h/(2\pi r \Delta L)$, так как эта составляющая тока течет вдоль h, поперек площади $2\pi r \Delta L$ кольца. Эквивалентная электрическая схема всего волокна имеет вид бесконечной цепочки (см. рис. 195.b), содержащей одинаковые звенья.

Обозначим полное сопротивление такой цепочки R. Заметим, что если выделить первое звено этой цепи, остальные звенья вместе можно заменить на параллельно подключенное R (см. рис. 195.c), ведь это бесконечная цепочка без одного звена, т.е. тоже бесконечная цепочка. Значит, полное сопротивление этой схемы R. Это позволяет получить уравнение на R:

$$R = R_1 + RR_2/(R + R_2).$$

Из двух корней этого квадратного уравнения следует оставить лишь положительный: $R = R_1/2 + \sqrt{R_1^2/4 + R_1 R_2}$. Подставляя сюда R_1 и R_2 и устремляя к нулю ΔL, находим сопротивление волокна $R = \sqrt{\rho\rho_0 h/(2\pi^2 r^3)}$. Текущий через аксон ток тогда равен $I = \phi/R$.

Примечание: Ток, порожденный нервной клеткой, ослабляется по мере удаления от места, где он возник, подобно тому, как постепенно падает ток в бесконечной цепочке. Это ослабление сигнала, как мы видели, физически связано с проводимостью клеточной мембраны ($R_2 \neq \infty$). Создание хорошей изоляции нервных волокон привело бы к существенному утяжелению нервной системы; альтернатива этому – усиливать нервный импульс. Как теперь хорошо известно, роль такого усилителя в нервных клетках играют несбалансированные друг с другом встречные диффузные потоки ионов натрия и калия. Потоки эти могут регулироваться клеточной мембраной. Современные модели нервных аксонов значительно сложнее описанной простейшей схемы (например, для правильного описания распространения короткого во времени импульса необходим учет электрической емкости между раствором внутри и внешней средой).

Ответ: Ток равен $I = \phi\sqrt{2\pi^2 r^3/(\rho\rho_0 h)}$.

5 Обозначим искомое расстояние через x и предположим, что оно не ноль и не бесконечность. Тогда через большой промежуток времени Джерри будет иметь скорость k/x. С другой стороны, эта скорость должна равняться скорости Тома V, так как лишь в этом случае x не меняется. Значит, $x = k/V$.

Если в некоторый момент расстояние между Томом и Джерри меньше найденного x (как, например, вначале), скорость Джерри больше скорости Тома, и расстояние между ними увеличивается, приближаясь к x. Если же расстояние между ними вдруг стало бы больше x, скорость Тома стала бы больше скорости мышонка, и расстояние снова стало бы приближаться к x. Значит, никакого другого (нулевого или бесконечного) ответа, кроме найденного x, не существует.

Ответ: Расстояние окажется равным k/V.

6 Наличие небольшой массы нафталина существенно не влияет на распределение температуры вдоль стержня. Докажем, что в установившемся режиме теплопередачи температура будет равномерно меняться вдоль стержня (от $t_1 = 56.2^o$ C на одном конце до $t_2 = 100^o$ C на другом).

Действительно, разобьем стержень на одинаковые кусочки длиной ΔL. В установившемся режиме теплопередачи тепло в стержне нигде не должно накапливаться, иначе то место, где теплота накапливается, будет неограниченно нагреваться. Значит поток тепла через каждый кусок ΔL одинаков. Куски ничем не отличаются друг от друга, кроме температур на их границах, и значит, по условию задачи, разность температур на краях произвольного куска не должна меняться от куска к куску. Это возможно, только если температура изменяется вдоль стержня по линейному закону:

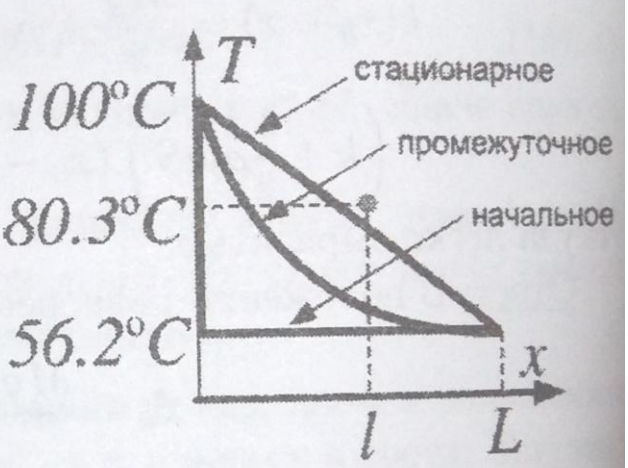

Рис. 201.а

$$T(x,t) = t_0 - (t_0 - t_1)x/L, \qquad (201.1)$$

здесь x – координата стержня, отсчитываемая от горячего (имеющего температуру $t_0 = 100^o$ C) конца.

Заметьте, что там, где находится нафталин (при $x = 47$ см), температура стержня недостаточна для его плавления.

Понятно, что и до момента установления равномерного распределения (201.1) нафталин не мог начать плавиться, (см. переход от начального распределения температур к стационарному распределению на рис. 201.а).

Ответ: Когда расплавится нафталин, весь ацетон уже выкипит.

7 Действующая на мальчика сила трения имеет две составляющие: одна создает центростремительное ускорение, другая – увеличивает линейную скорость мальчика при разгоне диска. По условию угловая скорость возрастает со временем по линейному закону: $\omega(t) = \beta t$, где $\beta = \omega_0/T$ – угловое ускорение. При этом центростремительное (направленное к центру) ускорение мальчика $a_1 = \omega^2(t)R = \beta^2 t^2 R$.

До тех пор, пока мальчик не скользит, модуль его линейной скорости так же возрастает пропорционально времени: $V(t) = \omega(t)R = a_2 t$, где $a_2 = \beta R$ – компонента ускорения мальчика, направленная по касательной к окружности.

Полное ускорение мальчика

$$a(t) = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{(\beta^2 t^2 R)^2 + (\beta R)^2}.$$

Единственной силой, способной сообщить мальчику такое ускорение, является, очевидно, сила трения покоя, величина которой не может превосходить $\mu N = \mu m g$. Значит ускорение $a(t)$ не должно превосходить μg:

$$a(t) \le \mu g \qquad \Rightarrow \qquad t \le t_0 = \frac{\sqrt[4]{\mu^2 g^2 - \beta^2 R^2}}{\beta\sqrt{R}}, \qquad \beta = \frac{\omega_0}{T}. \qquad (125.1)$$

Раз угловая скорость диска растет линейно, угол поворота диска зависит от времени по закону, аналогичному формуле пути при равноускоренном поступательном движении, $\phi(t) = \beta t^2/2$. К моменту времени t_0 диск повернется на угол $\phi_0 = \beta t_0^2/2$, где t_0 приведено в (125.1). Это соответствует $n = \phi_0/(2\pi)$ оборотам диска.

Наше решение теряет смысл и становится чисто мнимым если $\mu g < \beta R$, когда сила трения столь мала, что мальчик начинает скользить уже в момент начала движения колеса смеха.

<u>Ответ:</u> Число оборотов

$$n = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\left(\frac{\mu g T}{\omega_0 R}\right)^2 - 1}.$$

Если выражение под корнем отрицательно, мальчик начинает скользить по диску сразу же.