10 класс

1. После опускания в воду, имеющую температуру 10oC, тела, нагретого

до 100oC, через некоторое время установилась общая температура 40oC. В воду

опустили еще одно такое же тело, нагретое до до 100oC, но первое тело не убрали.

На сколько градусов поднимется температура воды? Теплоемкостью калориметра

и испарением воды пренебречь.

Решение:

1)

2)

3)

4) Перейдем к числам для удобства решения.

Ответ: t = 55° C.

1. Два автомобиля A и B движутся с постоянными скоростями v1 и v2 по

двум взаимно перпендикулярным прямым трассам к перекрестку. В начальный мо-

мент времени автомобили находились на расстояниях s1 и s2 от перекрестка. Через

какой промежуток времени t расстояние s между автомобилями станет наименьшим? Чему оно равно?

Решение:

Задачу удобнее решать в системе отсчета, в которой одна из частиц (например, **B**) покоится, а вторая (**A**) движется с относительной скоростью, величина которой

**v = √{v12 + v22}**.

В этом случае задача сводится к нахождению кратчайшего расстояния между частицей **B** и траекторией частицы **A**, т. е. к определению расстояния **BA/**.
Из подобия треугольников  **ACA/** и **A/DB** получим:

**v1t/(v2t) = (s2 − v2t)/(v1t − s1)**,

где **t** − время, за которое частица **A** достигнет точки **A/**.
Отсюда

**t = (s1v1 + s2v2)/(v12 + v22)**.

Тогда

**s = |BA/| = √{|BD|2 + |DA/|2} = |s2v1 − s1v2|/√{v12 + v22}**.

1. Какую минимальную горизонтальную скорость нужно сообщить шарику, подвешенному на вертикальной нерастяжимой нити, чтобы шарик описал полную окружность в вертикальной плоскости?

Решение:

Пусть при прохождении точки π/2 шарик будет иметь скорость V2.

Заметим, что при прохождении точки π/2 шарик должен иметь неотличимое натяжение нити, иначе она согнется и полный оборот не получится.

Тогда по второму закону Ньютона имеем: mg = ma, т.е. a = g

Центростремительное ускорение шарика в точке π/2: g = V2^2 / R => V2^2 = g R

Теперь прибегнем к закону сохранения энергии (в точке -π/2 и π/2). Получаем (V1 -  начальная скорость шарика, которую мы ищем):

mV1^2 / 2 = mV2^2/2 + mg2R

mV1^2 / 2 = (mgR + 4mgR) / 2

mV1^2 = 5mgR

V1 = √5gR

1. Два разных тела, разной формы и объема, с плотностями ρ1 и ρ2 уравновешены на рычажных весах, как это показано на рисунке. Как только эти тела полностью погрузили в воду, для их уравновешивания пришлось тела поменять местами. Найдите плотности этих тел, если известно что ρ2 / ρ1=2.5, а отношение плеч |AO|/|OB|=1/2. Плотность воды известна ρ=1000 кг/м3

Решение:

Приступил к решению задачи, выполнил рисунок, записал основные формулы  **(1 балл)**
Запишем условие равновесия стержня до погружения в воду

**ρ1V1 = 2ρ2V2, (1) (2 балла)**

после погружения в воду

**2(ρ1 − ρo)V1 = (ρ2 − ρo)V2. (2) (2 балла)**

Выразим из (1) **V1/V2 = 5** **(2 балла)**
и подставим в (2)

**10ρ1 − ρ2 = 9ρo. (2 балла)**

Решая это уравнение совместно с условием задачи **ρ2/ρ1 = 2,5**, находим

**ρ1 = 1,2ρo** и **ρ2 = 3ρo. (1 балл)**

1. На рисунке представлен график теплообмена трех тел. Определить установившуюся температуру в системе, если масса наиболее нагретого тела равна 1 кг и его удельная теплоёмкость равна 2000 .

1. Из вертикальной трубки высыпается песок, причем диаметр его струи остается равным диаметру трубки. Скорость песчинок у конца трубки 1 м/с. Во сколько раз средняя плотность песка в струе на расстоянии 2,4 м от конца трубки будет меньше, чем внутри трубки у ее конца? Считать, что каждая песчинка падает свободно.
2. Имеется шар массой M и радиусом R и материальная точка массой m. Во сколько раз уменьшится сила тяготения между ними, если в шаре сделать сферическую полость радиусом ? Материальная точка лежит на прямой, проведенной через центры шара и полости, на расстоянии R от центра шара и на расстоянии  от центра полости.

Решение:

Расстояние между центрами тел останется прежним, а вот масса шара уменьшится, так как выпадет (5/6)^3 от объема (и массы) . То есть масса станет равной М (1-(5/6)^3) = М \* 0,42.
Но если точка попадает внутрь полости, или на ее границу, то тяготения вообще не будет.

1. Английский физик Чилдрен в 1815 году проводил следующий опыт. Две платиновые проволочки одинаковой длины, но разных диаметров он подключил к батарее Вольта. Один раз он подключал проволочки последовательно, второй раз - параллельно друг с другом. В первом случае разогревалась лишь тонкая проволочка, a во втором - лишь толстая. 25 лет ученые не могли объяснить этот опыт. А каково ваше мнение. Объясните опыт Чилдрена.

Решение:

Пусть **r1 < r2** − радиусы проводников, тогда их сопротивления

**R1 = ρl/S1 = ρl/(πr12)** и **R2 = ρl/S2 = ρl/(πr22)**

Температура проводника становится постоянной при условии, что вся теплота, которая выделяется в проводнике

**Q = I2Rt = (U2/R)t**,

будет рассеиваться в окружающую среду. Согласно закону теплообмена Ньютона

**Q = k(T − To)St**,

где **k** − коэффициент теплообмена, **T** и **To** − соответствующие температуры проводника и окружающей среды, **S = 2πrl** − площадь боковой поверхности проводника, **t** − время.
а) Рассмотрим последовательное соединение проводников.

**I2R1t = k(T1 − To)2πr1lt; I2R2t = k(T2 − To)2πr2lt;**.

Разделив первое уравнение на второе

**R1/R2 = (T1 − To)r1/((T2 − To)r2)**

или, после замены сопротивлений

**r22/r12 = (T1 − To)r1/((T2 − To)r2)** и **r23/r13 = (T1 − To)/(T2 − To)**.

 **Вывод**: так как **r1 < r2**, то **T1 > T2**, тонкая проволочка разогревается до более высокой температуры.
б) Рассмотрим параллельное соединение проволочек.

**(U2/R1)t = k(T1 − To)2πr1t, (U2/R2)t = k(T2 − To)2πr2t**.

Разделим первое уравнение на второе

**R2/R1 = (T1 − To)r1/((T2 − To)r2)**

или

**r1/r2 = (T1 − To)/(T2 − To)**.

**Вывод**: так как **r1 < r2**, то **T2 > T1**, толстая проволочка разогревается до более высокой температуры.

1. Камень бросают с ровной горизонтальной поверхности под углом α к ней со скоростью v. Погода ясная, и солнечные лучи составляют угол β с горизонтом. Какой путь пройдет тень от камня к моменту его падения? Считайте, что β ≤ α ≤ π/2 (см. рисунок). Сопротивление воздуха не учитывайте.

Решение:

Поскольку **α ≥ β**, тень от камня будет двигаться по земле сначала влево, а затем вправо. Конечное положение тени совпадает с точкой падения камня. Если обозначить расстояние от точки броска до крайней левой точки траектории камня **yo**, а дальность полета камня **s**, то путь, пройденный тенью, будет равен

**l = 2yo + s**.

Для удобства вычисления  **yo** введем ось **x**, направленную из точки броска перпендикулярно солнечным лучам. Тогда координата тени **y** определяется исключительно координатой камня **х**:

**y = x/sinβ**.

Проекция начальной скорости камня на ось  **x** равна

**vx = vsin(α − β)**,

проекция ускорения свободного падения на ось **х** равна

**gx = −gcosβ**.

Следовательно, максимальное значение координаты **x** камня в процессе движения равно

**xo = −vx2/(2gx) = v2sin2(α − β)/(2gcosβ)**.

Таким образом, максимальное смещение тени камня влево составляет

**Yo = xo/sinβ = v2sin2(α − β)/(2gsinβcosβ)**.

Пользуясь тем, что дальность полета камня равна

**s = 2v2sin?cos?/g**,

получаем ответ

**l = v2sin2(α − β)/(gsinβcosβ) + 2v2sinαcosα/g = (sin2αctgβ + cos2αtgβ)v2/g**.

1. Максимальная дальность полета камня, выпущенного из неподвижной катапульты, равна *S* = 22,5 м. Найдите максимально возможную дальность полета камня, выпущенного из этой же катапульты, установленной на платформе, которая движется горизонтально с постоянной скоростью *v* = 15,0 м/с. Сопротивление воздуха не учитывать, ускорение свободного падения считать *g* = 10,0 м/с2.

Решение:

Хорошо известно, что максимальная дальность полета тела, брошенного под углом к горизонту, достигается при угле вылета равном **45°** и определяется формулой:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| S = | vo2 | .       (1) |
| g |

Из этой формулы можно найти скорость, которую катапульта сообщает камню:

|  |
| --- |
| vo = √(gS) = 15 м/с. |

Рассмотрим теперь полет камня, выпущенного из движущейся катапульты. Введем систему координат, оси которой: **X** — направлена горизонтально, а**Y** — вертикально. Начало координат совместим с положением катапульты в момент вылета камня.

Для вычисления вектора скорости камня необходимо учесть горизонтальную скорость движения катапульты **v = v**o. Допустим, что катапульта выбрасывает камень под углом **α** к горизонту. Тогда компоненты начальной скорости камня в нашей системе координат могут быть записаны в виде:

|  |
| --- |
| vxo = vo + vo cos α, |

|  |
| --- |
| vyo = vosin α.       (2) |

Закон движения камня имеет вид:

|  |
| --- |
| x = vxo = vo(1 + cos α)t, |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| y = vyot − | gt2 | = vot sin α − | gt2 | .       (3) |
| 2 | 2 |

Из второго уравнения системы (3) найдем время полета, положив **y = 0**,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| τ = | 2vo sin α | .       (4) |
| g |

Подставив это выражение в первое уравнение системы (3), получим дальность полета камня:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| S1 = vo(1 + cos α) | 2vo sin α | .       (5) |
| g |

Отвлечемся немного от решения данной конкретной задачи и порассуждаем о полученном выражении.

Во-первых, если катапульта неподвижна (**v = 0**), то формула (5) переходит в известное выражение для дальности полета тела, брошенного с начальной скоростью под углом к горизонту:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| S/ = | 2vo2 sin α cos α | .       (6) |
| g |

Во-вторых, из (5) совсем не следует, что **S**1 будет максимально при **α = 45°** (это справедливо для (6), когда **v = 0**).

Предлагая эту задачу на республиканскую олимпиаду, авторы были убеждены, что девять десятых участников получат формулу (5) и затем подставят в нее значение **α = 45°**. Однако, к нашему сожалению, мы ошиблись: ни один из олимпийцев не усомнился в том, что максимальная дальность полета всегда (!) достигается при угле вылета, равном **45°**. Этот широко известный факт имеет ограниченные рамки применимости: он справедлив только, если:

а) не учитывать сопротивление воздуха;
б) точка вылета и точка падения находятся на одном уровне;
в) метательный снаряд неподвижен.

Вернемся к решению задачи. Итак, нам необходимо найти значение угла **α**, при котором **S**1 определяемое формулой (5), максимально. Можно, конечно, найти экстремум функции, используя аппарат дифференциального исчисления: найти производную, положить ее равной нулю и, решив полученное уравнение, найти искомое значение **α**. Однако, учитывая, что задача была предложена ученикам 9-х классов, мы дадим ее геометрическое решение. Воспользуемся тем обстоятельством, что **v = v**o**= 15 м/с**.

Расположим векторы **v** и **v**o как показано на рис. Так как их длины равны, то вокруг них можно описать окружность с центром в точке О. Тогда длина отрезка **AC** равна **v**o**+ v**o**cos α** (это есть **v**xo ), а длина отрезка **BC** равна **v**o**sin α** (это **v**yo). Их произведение равно удвоенной площади треугольника **АВС**, или площади треугольника **АВВ**1.

Обратите внимание, что именно произведение входит в выражение для дальности полета (5). Иными словами, дальность полета равна произведению площади **ΔАВВ**1 на постоянный множитель **2/g**.

А теперь зададимся вопросом: какой из вписанных в данную окружность треугольников имеет максимальную площадь? Естественно, правильный! Поэтому искомое значение угла **α = 60°**.

Вектор **AB** есть вектор полной начальной скорости камня, он направлен под углом **30°** к горизонту (опять же отнюдь не **45°**).

Таким образом, окончательное решение задачи следует из формулы (5), в которую следует подставить **α = 60°**.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| S1 = | 2vo2 | (1 + cos 60°) sin 60° = S | 3√3 | = **58.5 м**. |
| g | 2 |