РЕШЕНИЕ АКМУЛЛИНСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ 2 ТУР 8 КЛАСС

1. В каждую клетку квадратной таблицы размером 25х25 вписано произвольно одно из чисел: +1 или -1. Под каждым из столбцов записывается произведение всех чисел данного столбца, а справа от каждой строки – произведение всех чисел данной строки. Может ли сумма всех 50 произведений быть равной нулю?

Решение: Найдем произведение всех 25 чисел, записанных под каждым столбцом и всех 25 чисел, записанных справа от строчек. Так как в этом произведении каждое из чисел квадратной таблицы входит по два раза, то произведение этих 50 произведений, в каждом из которых стоит по 25 множителей, будет положительным, т. е. равно 1. А так как произведение 50 чисел положительно, то отрицательных сомножителей будет четное число (2, 4, …, 50). Сумма же 50 произведений может быть нулем лишь в случае, когда 25 слагаемых равно 1, а 25 слагаемых равно - 1, т. е. слагаемых с - 1 должно быть нечетное число. А это значит, что сумма 50 написанных произведений не может равняться нулю.

1. Сосчитайте: .

Решение: Будем упрощать наше произведение :

(1 − 1/4)(1 − 1/9)(1 − 1/16) ... (1 − 1/225) Тогда получим: (1-1/2)( 1+1/2)(1-1/3)(1+1/3)(1-1/4)(1+1/4)(1-1/5)(1+1/5)…( 1-1/15) (1+1/15)=(1/2\*3/2)(2\3\*4/3)(3/4\*5/4)…(14/15\*16/15) =1/2\*16/15=8/15.

Ответ: 8/15.

1. Докажите, что n2+ n + 1 при любом натуральном : а) есть число нечетное; б) не является квадратом никакого другого натурального числа.

Решение: а) n2+ n + 1 = n(n+1)+1 -Так как – число четное, то – будет нечетным числом;

б) Ближайшие к числу n2+ n + 1 квадраты натуральных чисел n2 и (n+1)2 , но n2˂n2+n+1˂(n+1)2. Так как n2 и (n+1) – квадраты последовательных натуральных чисел, а число n2+ n + 1 находится между указанными квадратами, то оно само не может быть квадратом натурального числа.

Решите уравнение: .

Решение: Перепишем уравнение в виде

y^2 + (2 + x)y + (x^2 - 2x + 4) = 0.

Составим выражение для дискриминанта (относительно переменной у):

[(2 + x)^{2} - 4(x^2 - 2x + 4)]/2 = (-3 x^{2} + 12x - 12)/2

Условие существования корней:

(- 3x^{2} + 12x - 12)/2 больше или равно 0

выполнимо лишь при х = 2.

При всех других значениях переменной х выражение для дискриминанта не имеет смысла.

Тогда при х = 2 значение переменной у единственно и равно у = -2.

Действительно, при х = 2, у = -2:

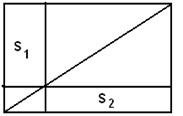
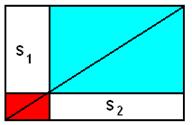
4 - 4 + 4 - 4 + 4 - 4 = 0 - справедливое равенство.

Ответ: х = 2, у = -2

1. На диагонали прямоугольника выбрали точку и провели через нее прямые, параллельные сторонам. По разные стороны от диагонали образовались два прямоугольника. Докажите, что их площади равны

Решение: Диагональ прямоугольника делит его на два равных

треугольника. Поэтому: S1= S1/S2=S2/S2+S+S2=S1+S+S Значит,S1=S2

1. Верно ли, что при любом четном числе х число х8+9х5+8х2 делится на 288?

Решение: 288=32\*9. Докажем сначала, что число делится на 32.

Если x=2k, то, подставив 2k в уравнение, получим 256k⁸+288k⁵+32k². Очевидно, что это число на 32 делится. Осталось доказать, что 8k⁸+9k⁵+k² делится на 9 при любом натуральном k.

9k⁵ делится на 9 при любом натуральном k. Докажем, что 8k⁸+k² делится на 9 при любом натуральном k. Если k делится на 3, это, очевидно, так. Если k даёт остаток 1 при делении на 3, то у числа 8k⁸+k² остаток будет 8+1=9, то есть число делится на 9 нацело. Наконец, если число k даёт остаток 2 при делении на 3, то у числа 8k⁸+k² остаток будет 2048+4=2052, 2052 делится на 9, значит, и число делится на 9.

Таким образом, данное число при любом чётном x делится на 9 и на 32, значит, оно делится и на 288.

1. (1/√2 +1)+(1/√3+√2)+...+(1/√100+√99)

Решение: Умножим каждое число на ему сопряженное (т.е. на такое же число только с другим знаком, в нашем случае это минус): 1\*(√2-1)/( √2+1)\*( √2-1)+ … + 1\*(√100-√99)/( √100+√99) \*(√100-√99)=( √2-1/1) +( √3-√2/1) +…+(√100-√99/1) =

=√100 – 1/1= 10 – 1/1=9/1=9 ; ( То есть √2, √3, √4… √99 сократятся и в числителе останется √100 – 1, а в знаменателе в каждой дроби число 1)

Ответ: 9;

В треугольнике АВС проведены биссектрисы углов А и В, угол между ними равен 125 град. Найдите угол С.

Решение: Т. О- точка пересечения биссектрис

угол АОВ=125

Рассмотрим тр. АВО сумма углов равна 180, получаем

А/2 + В/2 +125 =180

отсюда А+В=110

Теперь рассмотрим тр. АВС

А+В+С=180

С=180-(А+В)=180-110=70

Ответ: угол С =70 гр.

1. Докажите, что среди шести любых целых чисел найдутся два, разность которых делится на 5.

Решение: При делении на 5 возможных 5 разных остатков:

0; 1; 2; 3; 4. Так как чисел 6, то найдутся 2 числа с одинаковыми остатками; их разность разделится на 5.

1. Какой цифрой оканчивается число?

Решение: 1 степень – 8

2 степень - 64

3 степень – 512

4 степень – 4096

5 степень- 32768

6 степень – 262144

7 степень – 2097152

8 степень – 16777216

Цифры 8,4,2 и 6 повторяются ,отсюда следует, что 2009:4=502(ост.1)

Тогда последняя цифра  равна той же, что и 8 в 1 степени. Итак, последняя цифра 8.

Ответ: =…8.