**Задача №1**

В каждую клетку квадратной таблицы размером 25х25 вписано произвольно одно из чисел: +1 или -1. Под каждым из столбцов записывается произведение всех чисел данного столбца, а справа от каждой строки – произведение всех чисел данной строки. Может ли сумма всех 50 произведений быть равной нулю?

**Решение:**

*1 способ*

Рассмотрим для примера таблицу 3х3. Если ставить четно число -1, то произведение везде будет положительным

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 1 | 1 |  | 1 |
| -1 | -1 | 1 |  | 1 |
| -1 | -1 | 1 |  | 1 |
|  |  |  |  |  |
| 1 | 1 | 1 |  |  |

Если ставить нечетное количество -1, то не будет половины положительных и половины отрицательных чисел

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | -1 | 1 |  | -1 |
| -1 | -1 | -1 |  | -1 |
| -1 | -1 | 1 |  | 1 |
|  |  |  |  |  |
| 1 | -1 | -1 |  |  |

Чтобы сумма всех 50 произведений была равна 0, надо чтобы половина произведений была равна -25, а сумма остальной половины произведений была равна 25.

Чтобы произведение было положительным числом, надо чтобы количество -1 было четным.

Чтобы произведение было отрицательным числом, надо чтобы количество -1 было нечетным.

Так как количество строчек и столбцов – нечетное, то нельзя поставить -1 так, чтобы произведение строки или столбца дало положительное число, потому что, если общее количество -1 будет – нечетным, то тогда как бы мы ни поставили -1, не получится половины положительных и половины отрицательных произведений. А если общее число -1 будем четным, то все произведения будут положительными.

**Ответ: не может**

**Задача № 2**

Сосчитайте: .

**Решение:**

Рассмотрим отдельно каждый множитель в произведении

Можно заметить, что в числителе – произведение чисел больше и меньше знаменателя на 1. Также можно заметить, что 2 раза повторяются в числителе все числа, кроме 2 и 16 и 15, поэтому при сокращении останется

**Ответ:**

**Задача №3**

Докажите, что при любом натуральном *: а)* есть число нечетное; *б)* не является квадратом никакого другого натурального числа.

**Решение:**

А) Рассмотрим 2 случая с :

1 случай) – четное

Тогда - четное. *Четное число + четное число= четное число*. Ч*етное число + 1 = нечетное число*, так как 1 – нечетное число

2 случай) – нечетное

Тогда - нечетное. *Нечетное число + нечетное число= четное число*. Ч*етное число + 1 = нечетное число*, так как 1 – нечетное число

**Значит, при любом натуральном , будет нечетным числом**

Б) Число  *+ n + 1* может быть представлено в виде *n( n + 1) + 1*, где *n* – натуральное число. Произведение *n(n+1)* – четное число, следовательно,

*n( n + 1) + 1* –нечетное.

Ближайшие к числу  *+ n + 1* квадраты натуральных чисел – это и .

Действительно, *+ n + 1* и  *+ n + 1 + n + 1) + n = .*

Так как и - квадраты последовательных натуральных чисел, а число  *+ n + 1* находится между названными квадратами, то само оно квадратом натурального числа быть не может.

**Что и требовалось доказать**

**Задача №4**

Решите уравнение: .

**Решение:**

Преобразуем это уравнение под квадратное уравнение вида

Сгруппируем члены многочлена

В данном уравнении коэффициентом является , свободным членом является

Дискриминант равен

Дискриминант может быть только равен 0, так при отрицательных значениях решений нет, а получить положительный дискриминант нельзя, потому что любое число в четной степени положительно, а при умножении на -3 число станет отрицательным. Значит,

,

Подставим значение в уравнение

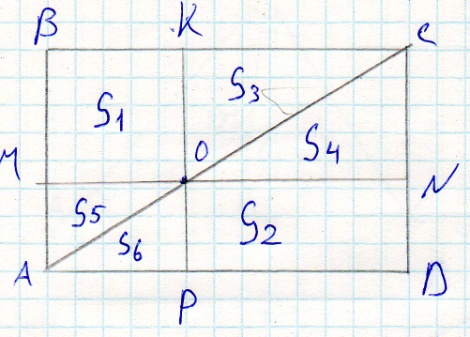
-

**Ответ:**

**Задача №5**

На диагонали прямоугольника выбрали точку и провели через нее прямые, параллельные сторонам. По разные стороны от диагонали образовались два прямоугольника. Докажите, что их площади равны.

**Решение:**

Так как были проведены линии параллельные сторонам, то KP – параллельна BA и CD, а MN – параллельна BC и AD. Значит, KP перпендикулярна MN, отсюда можно сделать вывод, что KCNO и MOPA являются прямоугольниками. Значит, , потому что AC является диагональю в трех прямоугольниках. Так как треугольник ABC=ACD, потому что в прямоугольнике диагональ делит прямоугольник на два равных треугольника, то . Значит

**Что и требовалось доказать.**

**Задача №6**

Верно ли, что при любом четном числе  число  делится на 288?

**Решение:**

Разложим число 288 на множители, 288=32\*9

Четное число можно представить как

+ так как вначале есть множитель 32

Преобразуем многочлен в скобках для удобства

*,* так как в третьем слагаемом присутствует множитель 9, то

так как другое слагаемое уже делится на 9

Разложим как сумму кубов, тогда

Чтобы данное произведение делилось на 9, достаточно, чтобы каждый множитель делился на 3

Остатки от деления на 3 могут быть 0,1,2

Рассмотрим 3 случая, когда разные остатки от деления на 3

1. Когда остаток равен 0, это число можно представить как , где Так как необходимо чтобы число делилось на 3, то тогда

, так как в начале произведения есть множитель 9, то все произведение должно делиться на 9

1. Когда остаток равен 1, это число можно представить как , тогда

Так как в скобку.

Рассмотрим доказательство относительно каждого множителя

Сначала докажем относительно

А затем относительно

Итак, каждый множитель делится на 3, следовательно, их произведение будет делиться на 9.

1. Остаток 2, это число можно представить как

Рассмотрим доказательство относительно каждого множителя

Сначала докажем относительно

А затем относительно

Так как второе произведение делится на 9, то и все произведение делится на 9.

Так как во всех трех случаях выражение

разделилось нацело на 9, а изначально нацело на 32, то значит, что при любом четном будет нацело делиться на 288.

**Что и требовалось доказать.**

**Задача №7**

Вычислить: 

**Решение:**

Преобразуем слагаемые для удобства счета

Избавимся от иррациональности в знаменателе

Запишем полученные значения в виде одного выражение

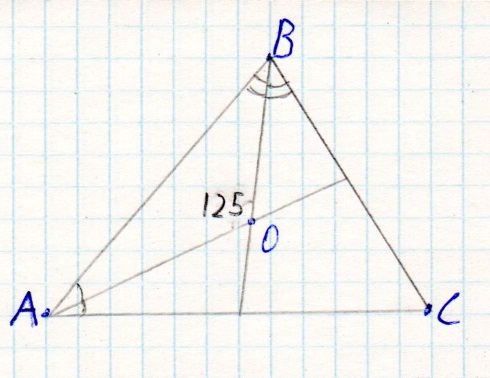
Можно заметить, что все числа, кроме 1 и взаимоуничтожаемые. Значит, после преобразований должно остаться выражение

**Ответ: 9**

**Задача №8**

В треугольнике АВС проведены биссектрисы углов А и В, угол между ними равен. Найдите угол С.

**Решение:**

Обозначим точку пересечения биссектрис буквой О.

Сумма углов OAB+ABO=180-125=55°, так как в треугольнике сумма углов равна 180°. Отсюда, сумма углов A+B=55\*2=110°, так как OAB и ABO половины углов A и B. Значит угол C=180-110=70°

**Ответ: 70°**

**Задача №9**

Докажите, что среди шести любых целых чисел найдутся два, разность которых делится на 5.

**Решение:**

*1 способ*

Остатки от деления на 5 могут быть равны 0,1,2,3,4. Так как дано шесть разных чисел, а разных остатков всего 5, то найдутся хотя бы два числа, у которых могут быть одинаковые остатки. Эти два числа можно представить по формуле , где коэффициенты, а остаток от деления на 5.Деление этих чисел на 5 можно записать как делится на 5, то и разность делится на 5, а значит, (делится на 5. Значит, среди любых шести целых чисел найдутся два, разность которых делится на 5

**Что и требовалось доказать**

**Задача №10**

Какой цифрой оканчивается число?

**Решение:**

Составим таблицу последних цифр для степени числа 8

|  |  |
| --- | --- |
|  | 8 |
|  | 4 |
|  | 2 |
|  | 6 |
|  | 8 |
|  | 4 |
|  | 2 |

Можно заметить, что последние цифры повторяются с шагом 4. Разделим 2009:4=502 (остаток 1). Значит, последняя цифра числа это 8

Ответ: последняя цифра 8