1. Найдем произведение всех 25 чисел, записанных под каждым столбцом и всех 25 чисел, записанных справа от строчек. Так как в этом произведении каждое из чисел квадратной таблицы входит по два раза, то произведение этих 50 произведений будет положительным, т.е. равно 1. Т.к. произведение 50 чисел положительно, то отрицательных множителей будет чётное число. Сумма же 50 произведений может быть нулем лишь тогда, когда 25 слагаемых равно 1, а 25 — -1, т.е. слагаемых с -1 должно быть чётное число. А это значит, что сумма 50 произведений не может равняться нулю.

2. $$\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{25}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{225}\right)=$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{15}\right)\left(1+\frac{1}{15}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{14}{15}\cdot\frac{16}{15}=\frac{1}{2}\cdot\frac{16}{15}=\frac{8}{15}$$

Ответ: $\frac{8}{15}$.

3. а) $n^2+n+1=n(n+1)+1$. $n(n+1)$ – чётное число, значит $n(n+1)+1$ – будет числом нечётным;

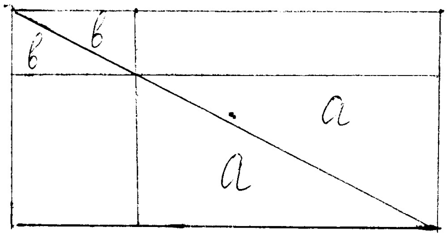
б) К числу n^2+n+1 ближайшие квадраты находятся среди натуральных чисел n^2 и $(n+1)^2$, но $n^2<n^2+n+1<(n+1)^2$. $(n+1)^2$ и n^2 – квадраты последовательных натуральных чисел, а число n^2+n+1 находится между указанными квадратами. Значит оно не может быть квадратом натурального числа.

4. $x^2+xy+y^2-2x+2y+4=0$. Обе части уравнения умножим на 2 и сгруппируем. Получим: $(x^2+2xy+y^2)+(x^2-4x+4)+(y^2+4y+4)=0$,

$(x+y)^2+(x-2)^2+(y+2)^2=0$, $x=2$; $y=-2$

Ответ: $(2;-2)$.

5



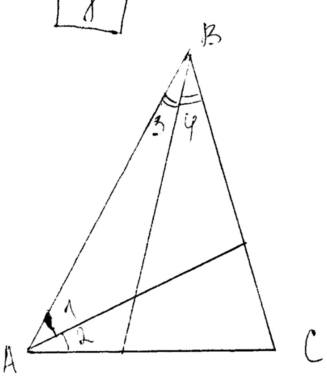
Диагональ делит прямоугольник на два больших равных треугольника. А прямые, параллельные сторонам делят эти треугольники на 2 пары равных ($\Delta в = \Delta в$, $\Delta a = \Delta a$) и на два внутренних прямоугольника. Отнимая от равных треугольников равные, получим фигуры, у которых площади равны.

6 Разложим многочлен на множители: $x^8+9x^5+8x^2 = x^2(x^3+1)(x^3+8)$. x чётно, значит x^2 делится на 4, а (x^3+8) – на 8. Пусть $x=3n$, тогда x^2 кратно 9. Если $x=3n\pm1$, то x^3+1 или $8+x^3$ делятся на 9. 4 и 9 взаимно простые числа, значит при любом чётном x рассматриваемое число делится на $4\cdot 9\cdot 8 = 288$.

7. $$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{98}}+\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}=\frac{1(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}+\frac{1(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$$
$$+\frac{1(\sqrt{4}-\sqrt{3})}{(\sqrt{4}+\sqrt{3})(\sqrt{4}-\sqrt{3})}+\dots+\frac{1(\sqrt{99}-\sqrt{98})}{(\sqrt{99}+\sqrt{98})(\sqrt{99}-\sqrt{98})}+\frac{1(\sqrt{100}-\sqrt{99})}{(\sqrt{100}+\sqrt{99})(\sqrt{100}-\sqrt{99})}=\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2})^2-1^2}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}+$$
$$+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{(\sqrt{4})^2-(\sqrt{3})^2}+\dots+\frac{\sqrt{99}-\sqrt{98}}{(\sqrt{99})^2-(\sqrt{98})^2}+\frac{\sqrt{100}-\sqrt{99}}{(\sqrt{100})^2-(\sqrt{99})^2}=\frac{\sqrt{2}-1}{1}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{1}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{1}+\dots+\frac{\sqrt{99}-\sqrt{98}}{1}+$$
$$+\frac{\sqrt{100}-\sqrt{99}}{1}=\cancel{\sqrt{2}}-1+\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{2}}+\cancel{\sqrt{4}}-\cancel{\sqrt{3}}+\dots+\cancel{\sqrt{99}}-\cancel{\sqrt{98}}+\sqrt{100}-\cancel{\sqrt{99}}=-1+10=9$$

Ответ: 9

8



$\angle 1 = \frac{1}{2}\angle A$, $\angle 3 = \frac{1}{2}\angle B$, $\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ$,

$\angle A + \angle B = 55^\circ \cdot 2 = 110^\circ$, $\angle C = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$

Ответ: $\angle C = 70^\circ$.

$\boxed{9.}$ Рассмотрим 5 коробок, пронумерованных 0, 1, 2, 3, 4, — цифрами, которые являются остатками от деления на 5. Распределим в эти коробки 6 предложенных целых чисел в соответствии с остатком от деления на 5. Поскольку чисел („предметов“) больше, чем коробок, есть одна коробка, которая содержит более одного предмета, т.е. существует два числа, помещенные в одну коробку. Следовательно, существуют два числа с одинаковым остатком от деления на 5. Тогда, разность этих чисел делится на 5.

$\boxed{10.}$ Находя значение степени $8^1, 8^2, 8^3, 8^4, 8^5, 8^6$ и т.д., замечаем закономерность: последней цифрой являются 8, 4, 2, 6 и далее они повторяются. Т.к. $2009 = 1004 \cdot 2 + 1$, то 8^{2009} оканчивается той же цифрой, что и 8^1, т.е. 8.

Ответ: 8