Акмуллинская олимпиада по математике.

 №1

Найдем произведение всех 25 чисел, записанных под каждым столбцом и всех 25 чисел, записанных справа от строчек. Так как в этом произведении каждое из чисел квадратной таблицы входит по два раза, то произведение этих 50 произведений, в каждом из которых стоит по 25 множителей, будет положительным, т. е. равно 1. А так как произведение 50 чисел положительно, то отрицательных сомножителей будет четное число (2, 4, …, 50). Сумма же 50 произведений может быть нулем лишь в случае, когда 25 слагаемых равно 1, а 25 слагаемых равно - 1, т. е. слагаемых с - 1 должно быть нечетное число. А это значит, что сумма 50 написанных произведений не может равняться нулю.

№2

Пусть 2=n.Преобразуем выражение к виду:

$\left(1\frac{1}{nn}\right)×\left(1-\frac{1}{\left(n+1\right)\left(n+1\right)}\right)×\left(1-\frac{1}{\left(n+2\right)\left(n+2\right)}\right)×…×\left(1-\frac{1}{\left(n+13\right)\left(n+13\right)}\right)$*=*$\frac{\left(nn-1\right)×\left(\left(n+1\right)\left(n+1\right)-1\right)\left(\left(n+2\right)-1\right)×…×(\left(n+13\right)\left(n+13\right)-1)}{nn×\left(n+1\right)×\left(n+1\right)×\left(n+2\right)×\left(n+2\right)×…×(n+13)(n+13)}=\frac{\left(n-1\right)×\left(n+1\right)×n×\left(n+2\right)\left(n+1\right)\left(n+3\right)×…×(n+12)(n+14)}{n\begin{matrix}2\\\end{matrix}×\left(n+1\right)\begin{matrix}2\\\end{matrix}×\left(n+2\right)\begin{matrix}2\\\end{matrix}×…×(n+13)\begin{matrix}2\\\end{matrix}}=\frac{(n-1)×(n+14)}{n×(n+13)},так как n=2,подставим 2 в выражение и получим \frac{(2-1)×(2+14)}{2×(2+13)}=\frac{16}{30}=\frac{8}{15}.$

*Ответ:*$\frac{8}{15.}$

 *№3*

Натуральные числа разбиваются на два непересекающихся множества вида 2m и 2m+1, где m - натуральное.
1) (2m)$\begin{matrix}2\\\end{matrix}$+ 2m + 1 = 4m$\begin{matrix}2\\\end{matrix}$ + 2m + 1 = 2(2m$\begin{matrix}2\\\end{matrix}$+m) + 1, где 2m$\begin{matrix}2\\\end{matrix}$+m натуральное (произведение и сумма натуральных числе всегда натуральна), будет нечётным.
(2m+1)$\begin{matrix}2\\\end{matrix}$ + (2m+1) + 1 = 4m$\begin{matrix}2\\\end{matrix}$ + 4m + 1 + 2m + 1 + 1 = 4m$\begin{matrix}2\\\end{matrix}$ + 6m + 2 + 1 =
2(2m$\begin{matrix}2\\\end{matrix}$+ 3m + 1) + 1, где 2m$\begin{matrix}2\\\end{matrix}$ + 3m + 1 натуральное, нечетное.

2) Квадрат чётного числа - чётный. Поэтому число n$\begin{matrix}2\\\end{matrix}$ + n + 1 не может быть квадратом чётного числа.
Число не может быть и квадратом нечётного числа:
n$\begin{matrix}2\\\end{matrix}$ + n + 1 = n$\begin{matrix}2\\\end{matrix}$+ 2n + 1 - n = (n+1)$\begin{matrix}2\\\end{matrix}$ - n
Т.е. число n$\begin{matrix}2\\\end{matrix}$ + n + 1 отличается от квадрата (n + 1)$\begin{matrix}2\\\end{matrix}$ на n единиц. (n + 1)$\begin{matrix}2\\\end{matrix}$- n^2 = n$\begin{matrix}2\\\end{matrix}$+ 2n + 1 - n$\begin{matrix}2\\\end{matrix}$ = 2n + 1 > n
Не может.
n$\begin{matrix}2\\\end{matrix}$ < n$\begin{matrix}2\\\end{matrix}$+ n + 1 = (n + 1)$\begin{matrix}2\\\end{matrix}$ - n < (n + 1)$\begin{matrix}2\\\end{matrix}$
Т.к. число n^2 + n + 1 лежит между двумя квадратами последовательных натуральных чисел, оно само не может быть квадратом натурального числа.

 №4.

x$\begin{matrix}2\\\end{matrix}+xy+y\begin{matrix}2\\\end{matrix}2x+2y+4=0$

(x$\begin{matrix}2\\\end{matrix}+2xy+y\begin{matrix}2\\\end{matrix})$-(xy+2x-2y-4)=0

(x+y)$\begin{matrix}2\\\end{matrix}-\left(x\left(y+2\right)+2×\left(y+2\right)\right)=0$

(x+y)$\begin{matrix}2\\\end{matrix}-\left(x+2\right)\left(y+2\right)=0$

или

(x$\begin{matrix}2\\\end{matrix}-2x+1)+(y\begin{matrix}2\\\end{matrix}+2y+1)+xy+2=0$

(x-1)$\begin{matrix}2\\\end{matrix}+\left(y+1\right)\begin{matrix}2\\\end{matrix}+\left(xy+2\right)=0.$

 *№5*

*Дано:ABCD-прямоугольник*

*LX параллельно AD ,BC, A L B*

*KP параллельно AB,DC P*

*DB-диагональ K O P*

*Доказать:S (ALOK)=S(OPXC) X*

 *D X C*

*Доказательство: Диагональ DB делит ABCD на 2 равных треугольника. Их S равны,так же как и многоугольники, составляющие эти 2 треугольника равны (S (LOB)+S(ALOK)+S(KOD)=S(BOP)+S(POXC)+S(DOX)).S(LOB)=S(BOP),S(KOD)=S(DOX).Значит и S(ALOK)=S(POXC).*

*Ответ: доказано.*

 *№6*

*x*$\begin{matrix}8\\\end{matrix}+9x\begin{matrix}5\\\end{matrix}+8x\begin{matrix}2\\\end{matrix}=x\begin{matrix}2\\\end{matrix}×\left(x\begin{matrix}6\\\end{matrix}+9x\begin{matrix}3\\\end{matrix}+8\right)=x\begin{matrix}2\\\end{matrix}\left(x\begin{matrix}2\\\end{matrix}+1\right)×\left(x\begin{matrix}2\\\end{matrix}+8\right).288=2×144=2×12\begin{matrix}2\\\end{matrix}$*=2*$×4\begin{matrix}2\\\end{matrix}×3\begin{matrix}2\\\end{matrix}$*.Из x*$\begin{matrix}2\\\end{matrix} и \left(x\begin{matrix}2\\\end{matrix}+1\right)одно из них четное ,поэтому \vdots 2$*.1)Ecли x*$\begin{matrix}2 \\\end{matrix}-четное ,то x-четное\left(\vdots 2\right),то x\begin{matrix}2\\\end{matrix}\vdots 4$

*x*$\begin{matrix}2\\\end{matrix}+1-нечетное,x\begin{matrix}2\\\end{matrix}+8-$*четное, потому что х*$\begin{matrix}2\\\end{matrix}-четное;х\begin{matrix}2\\\end{matrix}+1-нечетное;х\begin{matrix}2\\\end{matrix}+2-четное;х\begin{matrix}2\\\end{matrix}+3-нечетное…х\begin{matrix}2\\\end{matrix}$*+8-четное*

*2) Если х*$\begin{matrix}2\\\end{matrix}-нечетное,то х-нечетное$

*х*$\begin{matrix}2\\\end{matrix}+1-четное \vdots 2,\vdots 4,х\begin{matrix}2\\\end{matrix} \vdots $*3*

*х*$\begin{matrix}2\\\end{matrix}+8-четное \vdots 4$

*Ответ: не верно.*

 *№7*

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+…+\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}=\frac{1×\left(\sqrt{2}-1\right)}{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}+\frac{1×(\sqrt{3}-\sqrt{2)}}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}+…+\frac{1×\left(\sqrt{100}-\sqrt{99}\right)}{\left(\sqrt{100}+\sqrt{99}\right)\left(\sqrt{100}-\sqrt{99}\right)}=\frac{\sqrt{2}-1}{2-1}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}+…+\frac{\sqrt{100}-\sqrt{99}}{100-99}=\sqrt{2}-1+\sqrt{3} -\sqrt{2} +…+\sqrt{100} -\sqrt{99} =-1+ \sqrt{100}=-1+10=9.$$

$$Ответ:9.$$

$ $ *№8*

*Дано:ABC-треугольник В*

*AH-биссектриса угла А Н*

*ВН*$\begin{matrix}\\1\end{matrix}$*-биссектриса угла В*

*Угол АОВ=125 градусов А Н1 С*

*Найти: угол С- ? Решение: рассмотрим треуг. АВО*

 *Сумма всех углов треугольника равна 180 градусам*

 *(ОАВ+АВО)+125=180*

 *ОАВ+АВО=55*

 *(ОАВ+АВО)*$×2=$*А+В*

 *110=А+В*

 *С=180-110=70*

*Ответ: 70 градусов.*

 *№9*

*Распределим все множество целых чисел на 5 классов: В первый числа …-14,-9,-4,1,6,11…дающие остаток 1 при делении на 5; во второй числа …-13,-8,-3,2,7…. дающие остаток 2 при делении на 5;в третий числа …-12,-7,-2,3,8… дающие остаток 3 при делении на 5;в четвертый числа …-11,-6,-1,4,9…дающие остаток 4 при делении на 5;а в пятый числа кратные числу 5…-10,-5,0,5,10....Среди любых 6 чисел найдутся два числа разность которых будет равна…-10,-5,0,5,10…и делиться на 5.Например:1,3,8,15,2,6-8-3=5,а 5 делится на 5 и т.д.*

*Ответ: доказано.*

 *№10*

*8*$\begin{matrix}2009\\\end{matrix}$*=*$\left(8\begin{matrix}7\\\end{matrix}\right)\begin{matrix}287\\\end{matrix}$*=(…2)*$\begin{matrix}287\\\end{matrix}=\left(\left(…2\right)\begin{matrix}7\\\end{matrix}\right)\begin{matrix}41\\\end{matrix}=…8\begin{matrix}41\\\end{matrix}=…6×8=…8$

*8*$\begin{matrix}1\\\end{matrix}$*=8 2*$\begin{matrix}1\\\end{matrix}=2$

*8*$\begin{matrix}2\\\end{matrix}=…4$ *2*$\begin{matrix}2\\\end{matrix}=…4$

*8*$\begin{matrix}3\\\end{matrix}$*=…2 2*$\begin{matrix}3\\\end{matrix}=…8$

*8*$\begin{matrix}4\\\end{matrix}=…6$ *2*$\begin{matrix}4\\\end{matrix}$*=…6*

*8*$\begin{matrix}5\\\end{matrix}=…8$ *2*$\begin{matrix}5\\\end{matrix}=…2$

*Ответ: 8*