8 класс

1. В каждую клетку квадратной таблицы размером 25х25 вписано произвольно одно из чисел: +1 или -1. Под каждым из столбцов записывается произведение всех чисел данного столбца, а справа от каждой строки – произведение всех чисел данной строки. Может ли сумма всех 50 произведений быть равной нулю?

решение

Заполним всю таблицу единицами.  
Тогда сумма всех произведений строк и столбцов будет равна 50  
Теперь ставим в любую клетку -1, получается одно произведение в столбце = -1 и в одной строке = -1  
Сумма станет 48 - 2 = 46, т.е. одна -1 в клетке уменьшает сумму на 4  
т.е. сумма может быть либо максимально приближенная к нулю 2 или -2,   
если поставить -1 в строку , где уже есть -1, а в столбец где нет, то строка и столбец изменят знак на противоположный, и следовательно сумма останется неизменной.

Найдем произведение всех 25 чисел, записанных под каждым столбцом и всех 25 чисел, записанных справа от строчек. Так как в этом произведении каждое из чисел квадратной таблицы входит по два раза, то произведение этих 50 произведений, в каждом из которых стоит по 25 множителей, будет положительным, т. е. равно 1. А так как произведение 50 чисел положительно, то отрицательных сомножителей будет четное число (2, 4, …, 50). Сумма же 50 произведений может быть нулем лишь в случае, когда 25 слагаемых равно 1, а 25 слагаемых равно - 1, т. е. слагаемых с - 1 должно быть нечетное число. А это значит, что сумма 50 написанных произведений не может равняться нулю.

1. Сосчитайте: .

Решение:





Ответ: (1 − 1/4) (1 − 1/9) (1 − 1/16) . .. (1 − 1/225)=8/15

1. Докажите, что при любом натуральном *: а)* есть число нечетное; *б)* не является квадратом никакого другого натурального числа.

а) image034_6. Так как image035_6 – число четное, то image036_6 – будет нечетным числом;

б) Ближайшие к числу image002_127квадраты натуральных чисел image037_6 и image038_6, но image039_6. Так как image040_6 и image041_6 – квадраты последовательных натуральных чисел, а число image002_127 находится между указанными квадратами, то оно само не может быть квадратом натурального числа.

1. Решите уравнение: .

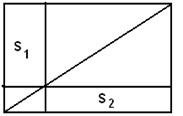
x^2+xy+y^2-2x+2y+4=0   
2x^2+2xy+2y^2-4x+4y+8=0   
(x^2+2xy+y^2)+(x^2-4x+4)+(y^2+4y+4)=0   
(x+y)^2+(x-2)^2+(y+2)^2=0   
Уравнение равносильно системе:   
{x+y=0   
{x-2=0   
{y+2=0,   
откуда х=2; у=-2.   
Ответ: (2;-2).

1. На диагонали прямоугольника выбрали точку и провели через нее прямые, параллельные сторонам. По разные стороны от диагонали образовались два прямоугольника. Докажите, что их площади равны.

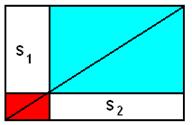


Или

Треугольники полученные при делении прямоугольника диагональю равны. Значит треугольник 1 = треугольнику 2, а треугольник 3 = треугольнику 4. Соответственно прямоугольник 5 = прямоугольнику 6 так-как при сложении фигур 1, 3, 5 поучается треугольник равный треугольнику 2+4+6.

****

**Решение:**



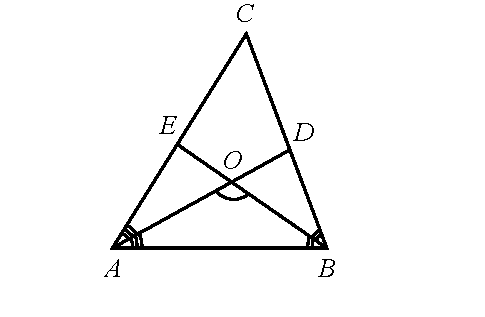
1. Верно ли, что при любом четном числе  число  делится на 288?

288=32\*9. Докажем сначала, что число делится на 32.  
Если x=2k, то, подставив 2k в уравнение, получим 256k⁸+288k⁵+32k². Очевидно, что это число на 32 делится. Осталось доказать, что 8k⁸+9k⁵+k² делится на 9 при любом натуральном k.  
  
9k⁵ делится на 9 при любом натуральном k. Докажем, что 8k⁸+k² делится на 9 при любом натуральном k. Если k делится на 3, это, очевидно, так. Если k даёт остаток 1 при делении на 3, то у числа 8k⁸+k² остаток будет 8+1=9, то есть число делится на 9 нацело. Наконец, если число k даёт остаток 2 при делении на 3, то у числа 8k⁸+k² остаток будет 2048+4=2052, 2052 делится на 9, значит, и число делится на 9.  
  
Таким образом, данное число при любом чётном x делится на 9 и на 32, значит, оно делится и на 288.

1. Вычислить: 

проверить  
1/(1+корень(2)) + 1/(корень(2) +корень(3)) + …+1/(корень(100)+ корень(99)) =(корень(2)-1)/((корень(2)+1)(корень(2)-1) +  
+(корень(3)-корень(2))/((корень(3)+корень(2))(корень(3)-корень(2)) +  
+…+ (корень(100)-корень(99))/ (корень(100)-корень(99)) (корень(100)+ корень(99))= (корень(2)-1)/(2-1) +  
+(корень(3)-корень(2))/(3-2)+…+ (10- корень(99))/(100-99) =   
=корень(2)-1+корень(3)-корень(2)+…+10-корень(99) =-1+…+10=9  
  
Ответ 9

1. В треугольнике АВС проведены биссектрисы углов А и В, угол между ними равен . Найдите угол С.



т. О- точка пересечения биссектрис  
угол АОВ=125  
Рассмотрим тр. АВО сумма углов равна 180, получаем  
А/2 + В/2 +125 =180  
отсюда А+В=110  
Теперь рассмотрим тр. АВС  
А+В+С=180     
С=180-(А+В)=180-110=70

1. Докажите, что среди шести любых целых чисел найдутся два, разность которых делится на 5.

Решение: При делении на 5 возможных 5 разных остатков:

0; 1; 2; 3; 4. Так как чисел 6, то найдутся 2 числа с одинаковыми остатками; их разность разделится на 5.

**Решение.** Рассмотрим 5 коробок, пронумерованных 0,1,2,3,4, - цифрами, представляющими собой остатки от деления на 5. Распределим в эти коробки шесть произвольных целых чисел в соответствии с остатком от деления на 5, то есть, в одну и ту же коробку помещаем числа, имеющие одинаковый остаток от деления на 5. Поскольку чисел ("предметов") больше, чем коробок, согласно принципу Дирихле, существует одна коробка, содержащая более одного предмета. То есть, существуют (по крайней мере) два числа, помещенные в одну и ту же коробку. Следовательно, существуют два числа с одинаковым остатком от деления на 5. Тогда, разность этих чисел делится на 5.

1. Какой цифрой оканчивается число?

Рассмотрим последний цифры степеней 8

8^1=...8

8^2=...4

8^3=...2

8^4=...6

8^5=...8

8^6=...4

как видно последние цифры последовательных степеней 8, повторяются з периодом 4

2009=2008+1=4\*502+1

поэтому последняя цифра числа 8 в степени 2009 такая же как и числа 8 в степени 1, т.е. цифра 8