

№1

Найдём произведение всех чисел, записанных под каждой столбцом и всех чисел, записанных справа от строк. Так как в этом произведении каждое из чисел квадратной таблицы входит по два раза, то произведение этих 50 произведений будет положительным, т.е. равно 1. А так как произведение 50 чисел положительно, то отрицательных сомножителей будет чётное число. Сумма 50 произведений может быть нулём в том случае, когда 25 слагаемых равно 1, а 25 слагаемых равно -1, т.е. слагаемых с 1 должно быть чётное число. А это значит, что сумма 50 написанных произведений не может равняться нулю.

№2

$$(1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{9})(1 - \frac{1}{16})(1 - \frac{1}{25}) \dots (1 - \frac{1}{225}) = (1 - \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3})(1 + \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{4})(1 + \frac{1}{4}) \dots (1 - \frac{1}{15})(1 + \frac{1}{15}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \dots \frac{14}{15} \cdot \frac{16}{15} = \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{15} = \frac{8}{15}$$

№3.

а) Так как $n(n+1)$ - число чётное, то $n(n+1)+1$ - число нечётное.

б) Ближайшие к числу n^2+n+1 квадраты чисел n^2 и $(n+1)^2$.

n^2 и $(n+1)^2$ - квадраты последовательных чисел, число n^2+n+1 находится между указанными квадратами, значит оно не может быть квадратом натурального числа.

№4.

Умножим на обе части уравнения и сгруппируем.

Получаем уравнение:

$$(x^2 + 2xy + y^2) + (x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 4y + 4) = 0$$

$$(x+y)^2 + (x-2)^2 + (y+2)^2 = 0$$

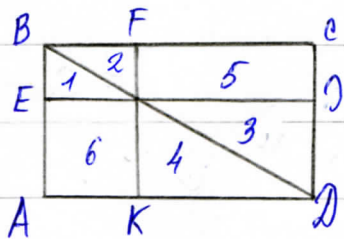
$$x = 2, y = -2$$

Ответ: (2; -2).

№5.

Диагональ делит исходный прямоугольник и два внутренних пря-

мозаикика на равные треугольнички. Отнимим от равных треугольничков равные, получим треугольнички равной площади.



$S_1 = S_2, S_3 = S_4, S_{ABD} = S_{BCD}$, т.к. диагональ делит прямоугольник на 2 равных треугольника.

$$\left. \begin{aligned} \text{Тогда: } S_5 &= S_{BCD} - S_2 - S_3 \\ S_6 &= S_{ABD} - S_1 - S_4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow S_5 = S_6$$

№6.

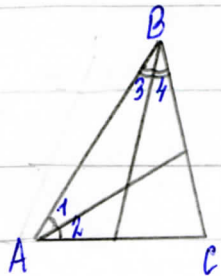
Разложим многочлен на множители: $x^8 + 9x^5 + 8x^2 = x^2(x^3 + 1)(x^3 + 8)$.

П.к. x чётно, то x^2 делится на 4, а $(x^3 + 8)$ - на 8. Пусть $x = 3b$, тогда x^2 кратно 9. Если $x = 3b \pm 1$, то $x^3 + 1$ или $x^3 + 8$ также делятся нацело на 9. П.к. 4 и 9 взаимно простые числа, то при любом чётном x рассматриваемое число делится на $4 \cdot 8 \cdot 9 = 288$.

№7.

$$\frac{1(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} + \frac{1(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} + \dots + \frac{1(\sqrt{100}-\sqrt{99})}{(\sqrt{100}+\sqrt{99})(\sqrt{100}-\sqrt{99})} = (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (\sqrt{4}-\sqrt{3}) + \dots + (\sqrt{99}-\sqrt{98}) + (\sqrt{100}-\sqrt{99}) = \sqrt{2}-1 + \sqrt{3}-\sqrt{2} + \sqrt{4}-\sqrt{3} + \dots + \sqrt{99}-\sqrt{98} + \sqrt{100}-\sqrt{99} = -1 + 10 = 9$$

№8.



$$\angle 1 = \angle A : 2 ; \angle 3 = \angle B : 2$$

$$\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ$$

$$\angle A + \angle B = 55^\circ \cdot 2 = 110^\circ$$

$$\angle C = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$$

Ответ: $\angle C = 70^\circ$

№9.

Рассмотрим 5 коробок, пронумерованных 0, 1, 2, 3, 4, - цифрами, представляющими собой остатки от деления на 5. Распределим в эти коробки произвольных чисел в соответствии с остатком от деления на 5. Чисел больше, чем коробок, значит существует одна коробка, содержащая более одного предмета. П.к. существуют два числа, помещённые в одну и ту же коробку. Существуют два числа с одинаковым остатком. Разность этих чисел делится на 5.

№10.

Находя значения степени $8^1, 8^2, 8^3, 8^4, 8^5$ и т.д., замечаем закономерность: последней цифрой являются 8, 4, 2, 6, а далее они повторяются. $\overline{П.к. 2009} = 502 \cdot 4 + 1$, то 8^{2009} оканчивается той же цифрой, что и 8^1 , т.е. 8.