Кузин Виталий 8а

№1

Найдём произведения всех 25 чисел, записанных под каждым столбцом и всех 25 чисел, записанных справа от строчек. Так как в этом произведении каждое из чисел квадратной таблицы входит по два раза, то произведение этих 50 произведений, в каждом из которых стоит по 25 множителей, будет положительным, т.е. равно 1. А так как произведения 50 чисел положительно, то отрицательных сомножителей будет четное число (2, 4, …, 50). Сумма же 50 произведений может быть нулём лишь в случае, когда 25 слагаемых равно 1, а 25 слагаемых равно −1, т.е. слагаемых с −1 должно быть нечётное число. А это значит, что сумма 50 написанных произведений не может равняться нулю.

№2

$(1-\frac{1}{4})\cdot(1-\frac{1}{9})\cdot(1-\frac{1}{16})\cdot(1-\frac{1}{25})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{1}{225})=(1-\frac{1}{2})\cdot(1+\frac{1}{2})\cdot(1-\frac{1}{3})\cdot(1+\frac{1}{3})\cdot(1-\frac{1}{4})\cdot(1+\frac{1}{4})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{1}{15})\cdot$

$\cdot(1+\frac{1}{15})=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{14}{15}\cdot\frac{16}{15}=\frac{1}{2}\cdot\frac{16}{15}=\frac{8}{15}$ Ответ: $\frac{8}{15}$

№3

а) $n^2+n+1=n(n+1)+1$. Так как $n(n+1)$ – число чётное, то $n(n+1)+1$ – будет нечётным числом

б) Ближайшие к числу n^2+n+1 квадраты натуральных чисел n^2 и $(n+1)^2$, но $n^2<n^2+n+1<(n+1)^2$. Так как n^2 и $(n+1)^2$ – квадраты последовательных натуральных чисел, а число n^2+n+1 находится между указанными квадратами, то оно само не может быть квадратом натурального числа

№4

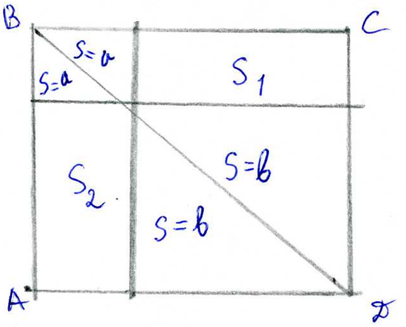
$x^2+xy+y^2-2x+2y+4=0$

Умножим на обе части на 2 уравнения и сгруппируем. В итоге получим: $(x^2+2xy+y^2)+(x^2-4x+4)+(y^2+4y+4)=0$, $(x+y)^2+(x-2)^2+(y+2)^2=0$, $a^2\geq 0$ при любом a, Тогда $(x+y)^2=0$, $(x-2)^2=0$, $(y+2)^2=0$; $x=2$, $y=-2$

Ответ $(2;-2)$

№5

Диагональ делит исходный прямоугольник и два внутренних прямоугольника на равные треугольники. Отнимая от равных треугольников равные, получим фигуры равной площади. Пусть $S_{ABD}=S_{BCD}=C$, Тогда $\left.\begin{array}{l}S_1=S-a-b\\ S_2=S-a-b\end{array}\right\}\Rightarrow S_1=S_2$



№6

Разложим многочлен на множители: $x^8+9x^5+8x^2=x^2(x^3+1)(x^3+8)$. Так как x чётно, то x^2 делится на 4, а (x^3+8) – на 8. Пусть $x = 3n$, тогда x^2 кратно 9. Если $x = 3n \pm 1$, то x^3+1 или x^3+8 также делятся нацело на 9. Так как 4 и 9 взаимно простые числа, то при любом четном x рассматриваемое число делится на $4 \cdot 8 \cdot 9 = 288$

№7

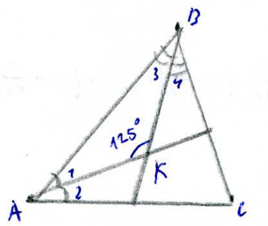
$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}=\frac{1\cdot(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)\cdot(\sqrt{2}-1)}+\frac{1\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{2})}+\ldots+\frac{1\cdot(\sqrt{100}-\sqrt{99})}{(\sqrt{100}+\sqrt{99})\cdot(\sqrt{100}-\sqrt{99})}=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+$$

$$+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\ldots+(\sqrt{99}-\sqrt{98})+(\sqrt{100}-\sqrt{99})=\cancel{\sqrt{2}}-1+\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{2}}+\cancel{\sqrt{4}}-\cancel{\sqrt{3}}+\ldots+\cancel{\sqrt{99}}-\cancel{\sqrt{98}}+\sqrt{100}-\cancel{\sqrt{99}}=-1+10=9$$

№8

$\angle 1 = \frac{1}{2}\angle A$, $\angle 3 = \frac{1}{2}\angle B$; $\overset{\triangle ABK}{\angle 1 + \angle 3} = 180° - 125° = 55°$; $\angle A + \angle B = 55° \cdot 2 = 110°$; $\angle C = 180° - 110° = 70°$ $\triangle ABC$

Ответ: $\angle C = 70°$



№9

При делении на 5 возможных 5 разных остатков: 0; 1; 2; 3; 4. Так как чисел 6, то найдутся 2 числа с одинаковыми остатками, их разность разделится на 5.

№10

Находя значения степени $8^1, 8^2, 8^3, 8^4, 8^5$ и т.д, замечаем закономерность: последней цифрой являются 8, 4, 2, 6, а далее они повторяются. Так как $2009 = 502 \cdot 4 + 1$, то 8^{2009} оканчивается той же цифрой, что и 8^1, то есть 8.