1. Сумма всех 50 произведений не может быть равной нулю.

Такое возможно только, если у квадратной таблицы четное количество клеток, т.е. 2х2,4х4,... У таблиц с нечетным числом квадратов (3х3,5х5,...) сумма всех произведений по столбцам и по строкам не может быть равной нулю. Чтобы сумма всех 50 произведений была равна нулю в таблице 25х25, нужно, чтобы были одинаковое количество чисел +1 и -1. А это невозможно.

1. Сосчитайте: (1 - $\frac{1}{4}$) (1 - $\frac{1}{9}$) (1 - $\frac{1}{16}$) (1 - $\frac{1}{25}$) ... (1 - $\frac{1}{225}$).

Решение. Применим к каждому множителю формулу разности квадратов a2 – b2 = (a-b) (a+b):

(1 - $\frac{1}{4}$) (1 - $\frac{1}{9}$) (1 - $\frac{1}{16}$) (1 - $\frac{1}{25}$) ... (1 - $\frac{1}{225}$) =

= (1 - $\frac{1}{2}$) (1 + $\frac{1}{2}$) (1 - $\frac{1}{3}$) (1 + $\frac{1}{3}$) (1 - $\frac{1}{4}$) (1 + $\frac{1}{4}$) (1 - $\frac{1}{5}$) (1 + $\frac{1}{5}$)... (1 - $\frac{1}{15}$) (1 + $\frac{1}{15}$) =

= $\frac{1}{2}$ \* $\frac{3}{2}\*\frac{2}{3}$ \* $\frac{4}{3}\* \frac{3}{4}$ \* $\frac{5}{4}$ \*$\frac{4}{5}$ ...$\* \frac{14}{15}$ \* $\frac{16}{15}$ = $\frac{1}{2}$ \* $\frac{16}{15}$ = $\frac{8}{15}$ .

Ответ: $\frac{8}{15}$.

1. Докажите, что n2 + n + 1 при любом натуральном n: а) есть число нечетное; б) не является квадратом никакого другого натурального числа.

Доказательство.

а) при n=1 очевидно: 12+1+1=3 – нечетное число. При четных натуральных числах n (т.е. n=2k) получим: (2k)2 + 2k + 1 = 4k2 +2k + 1 – нечетное число. При нечетных натуральных числах n (т.е. n=2k+1) получим: (2k+1)2 + (2k+1) + 1 = 4k2 +4k + 1 + 2k+1 + 1 = 4k2 +6k + 3 – тоже нечетное число.

б) n2 + n + 1 при любом натуральном n не является квадратом никакого другого натурального числа. Числа n и n+1 являются последовательными. Их квадратами будут n2 и (n + 1)2. Представим

n2 + n + 1 в виде квадрата числа: n2 + n + 1 = (n + 1)2 – n. Оно будет больше, чем n2 , и меньше, чем (n + 1)2, т.е. располагается между квадратами двух последовательных натуральных чисел. Значит, оно не может быть квадратом никакого натурального числа.

**4**. Решить уравнение: x2 +xy + y2 – 2x +2y +4 = 0.

Решение: x2 +xy + y2 – 2x +2y +4 = 0,

(x + y)2 - xy - 2x +2y +4 = 0,

(x + y)2 – x(y + 2) +2(y +2)= 0,

(x + y)2 – (y + 2) (x - 2)= 0,

(x + y)2 = (y + 2) (x - 2). У этого уравнения других корней, чем х=2 и у=-2, нет.

Ответ: х=2, у= -2.

 P

**5**. B C

 o

 O

 M O N

O

$$ А$$

 A D

 Q

Дано:

АВСD – прямоугольник, АС – его диагональ, О ϵ АС, PQ║AB║CD, MN║BC║AD.

Доказать: SMBPO = SQOND.

Доказательство:

Диагональ АС делит прямоугольник ABCD на два равных треугольника АВС и АDC. Значит, SABC = SADC (равные фигуры имеют равные площади).

SABC = SAMO+SMBPO+SOPC,

SADC = SAQO+SQOND+SONC.

SAMO = SAQO, так как АО – диагональ прямоугольника AMOQ;

SOPC = SONC, так как ОС – диагональ прямоугольника OPCN.

Отсюда следует, что SMBPO = SQOND.

**6.** Верно ли, что при любом четном числе х число х8 + 9х5 +8х2 делится на 288?

Решение:

Число 288 можно разложить на простые множители (288=25\*32) или представить в виде произведения чисел 32 и 9, т.е. 288=32\*9. Поэтому, если число делится на 288, то оно делится на 32 и на 9. Докажем сначала, что число делится на 32.
Формула четного числа x=2k . Если x=2k, то, подставив 2k в выражение х8 + 9х5 +8х2, получим 256k⁸+288k⁵+32k². Очевидно, что это число на 32 делится. Осталось доказать, что 8k⁸+9k⁵+k² делится на 9 при любом натуральном k.
9k⁵ делится на 9 при любом натуральном k. Докажем, что 8k⁸+k² делится на 9 при любом натуральном k. Если k делится на 3, это, очевидно, так. Если k даёт остаток 1 при делении на 3, то у числа 8k⁸+k² остаток будет 8+1=9, то есть число делится на 9 нацело. Наконец, если число k даёт остаток 2 при делении на 3, то у числа 8k⁸+k² остаток будет 2048+4=2052, 2052 делится на 9, значит, и число делится на 9.
Таким образом, данное число при любом чётном x делится на 9 и на 32, значит, оно делится и на 288.

**7**. Вычислить: $\frac{1}{\sqrt{2}+ 1}$ + $\frac{1}{\sqrt{3}+ \sqrt{2}}$ + … + $\frac{1}{\sqrt{100}+ \sqrt{99}}$.

Решение. И числитель, и знаменатель каждой дроби умножим на выражение, «сопряженное» знаменателю, затем к знаменателю каждой дроби применим формулу разности квадратов:

 $\frac{1}{\sqrt{2}+ 1}$ + $\frac{1}{\sqrt{3}+ \sqrt{2}}$ + … + $\frac{1}{\sqrt{100}+ \sqrt{99}}$. = $\frac{\sqrt{2}-1}{\left(\sqrt{2}+1\right)(\sqrt{2}- 1)}$ + $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)(\sqrt{3}- \sqrt{2})}$ + … + +$\frac{\sqrt{100}-\sqrt{99}}{\left(\sqrt{100}+\sqrt{99}\right)(\sqrt{100}- \sqrt{99} )}$ = $\frac{\sqrt{2}-1}{(2- 1)}$ + $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(3- 2)}$ + … + $\frac{\sqrt{100}-\sqrt{99}}{(100- 99 )}$ =

= $\sqrt{2}- 1+ \sqrt{3}- \sqrt{2}+ …+ \sqrt{100}- \sqrt{99}= -1+ \sqrt{100}= -1+10=9.$

Ответ: 9. B

**8.**

 A1

 O

Дано: A C

 B1

∆АВС, AA1, BB1 – биссектрисы углов A и B, ﮮАОВ=1250.

Найти: Сﮮ

Решение: Пусть угол ВАА1 = х0.Так как по условию задачи AA1 – биссектриса угла А, то угол А1АС = х0. Пусть угол АВВ1 = у0. Так как по условию задачи ВВ1 – биссектриса угла В, то угол В1ВС = у0. Сумма углов ∆АВО равна 1800, т.е. х+у+1250=1800, отсюда х+у = 550. Сумма углов ∆АВС также равна 1800, т.е. 2х+2у+ Сﮮ =1800, отсюда угол С = 1800 – 2(х+у) = 1800 – 1100 = 700.

Ответ: Угол С равен 700.

**9**. Доказать, что среди шести любых целых чисел найдутся два, разность которых делится на 5.

Решение: По признаку делимости нацело на 5 делятся числа, которые оканчиваются на 0 или 5 (дают остаток 0). Другие целые числа при делении на 5 дают остатки: 1; 2; 3; 4. Так как целых чисел 6, то среди них обязательно найдутся 2 числа с одинаковыми остатками; их разность будет оканчиваться нулем, значит, разделится на 5.

**10**. Какой цифрой оканчивается число 82009?

Решение:

81 =8, 82 = 64, 83 =512, 84 = 4096,… Последние цифры степеней числа 8 – это цифры 8-4-2-6, они периодически повторяются. На 4 делится число 2008. Следовательно, 82008 оканчивается на 6. Значит, 82009 оканчивается на 8.

Ответ: Последняя цифра числа 82009 будет 8.