1. Решение:

Пусть S - кол-во золотых монет клада, a, b, c - натур. числа

Поскольку сундук вмещает 500 золотых монет, то $S \leq 500$.

Составим ур-е для первого случая: $13a + 8 = S \Rightarrow a = 1, 2, 3, \dots 37$

Дальше оставим лишь то S, при делении которого на 11 в остатке будет 3, то есть $11b + 3 = S$, где b - натуральное число. Таких чисел всего три: 47, 190, 333.

Затем найдем среди них такое S, которое делится на 8 с остатком 5 $\Rightarrow S = 333$

Ответ: клад состоял из 333 монет

2. Решение:

Т.к. дробь $\frac{89}{3m+7n} \in N$ (натуральные числа), то $3m+7n=1$ или $3m+7n=89$, т.к. 89 – простое число. Но $3m+7n \neq 1$, если учитывать, что m и n – натуральные числа, тогда $3m+7n=89$, но m и $n \in N$. Решением данного ур-я будут следующие корни:

$m=4$, $n=11$ – первое реш-е
$m=11$, $n=8$ – второе
$m=18$, $n=5$ – третье
$m=25$, $n=2$ – четвертое

Из этих корней $m=11$, $n=8$ – с наименьшей разностью на 3.

Ответ: на 3.

3. Решение:

Ответ: на 3.

3. Решение:

Пусть $x + 3y = a$, тогда:

$$\begin{cases} x + 3y = a \\ x^2 + xy + 4y^2 \le 3 \end{cases} \Rightarrow x = a - 3y$$

$$(a-3y)^2 + y(a-3y) + 4y^2 \le 3$$

$$a^2 - 6ay + 9y^2 + ay - 3y^2 + 4y^2 \le 3$$

$$10y^2 - 5ay + a^2 - 3 \le 0 \quad (a = 10,\ b = -5a,\ c = a^2 - 3)$$

$$D = b^2 - 4ac = (-5a)^2 - 4 \cdot 10(a^2 - 3) = 25a^2 - 40a^2 + 120 = -15a^2 + 120$$

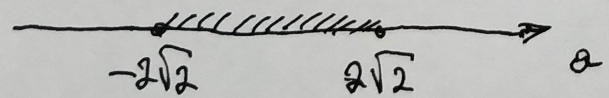
Чтобы ур-е имело хоть один корень, ~~он~~ его дискриминант должен быть неотрицателен, то есть $D \geqslant 0$

$$-15a^2 + 120 \geqslant 0 \quad | : (-15)$$

$$a^2 - 8 \le 0$$

$$(a - 2\sqrt{2})(a + 2\sqrt{2}) \le 0$$

$$a_1 = 2\sqrt{2};\ a_2 = -2\sqrt{2}$$



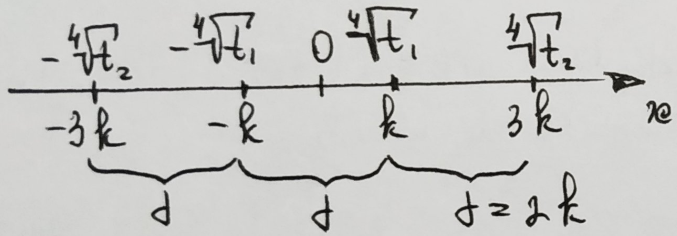
Только при таких знач-ях a система будет иметь реш-е. Следовательно, наибольшее из подходящих $a = 2\sqrt{2}$.

Ответ: $2\sqrt{2}$.

4. Решение:

Пусть $t = x^4$, тогда $x^8 + ax^4 + 1 = 0 \Rightarrow t^2 + at^2 + 1 = 0$

Если данное квадратное ур-е может иметь максимально 2 положительных корня, то ур-е $x^8 + ax^4 + 1 = 0$ имеет макс. 4 корня: $\pm\sqrt[4]{t_1}$ и $\pm\sqrt[4]{t_2}$. Т.к эти корни образуют арифм прогрессию, то на координат. прямой они будут расположены следующим образом:



$\Rightarrow$ относятся как $(-3) : (-1) : 1 : 3$

Тогда $t_1 = k^4$ $t_2 = (3k)^4 = 81$

К $t^2 + at^2 + 1$ применим теорему Виета $t^2 - 82k^4 t + 81k^8 = 0$

$$\begin{cases} 81k^4 = 1 \\ -82m^4 = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m^4 = \frac{1}{9} \\ a = -\frac{82}{9} \end{cases}$$

Ответ: $a = -\frac{82}{9}$