№1. Решение.

Рассмотрим 1 условие:  
500:13=38,...  
38\*13+8=502  
Из этого следует, что в первый раз пираты получили меньше 38 монет.   
Значит, это могло быть любое число от 1 до 37, а монет в сундуке от 1\*13+8=21 до 37\*13+8=489.

Рассмотрим 2 условие:  
21 и 489 не делятся на 11 с остатком 3.  
(21+13):11=34:11 дает в остатке не 3  
(34+13):11=47:11=4, остаток 3.  
Следующее такое число – 190, дальше – 333.

Рассмотрим 3 условие.   
47:8 дает в остатке не 5  
190:8 дает в остатке не 5  
333:8=41, остаток 5.

Ответ: 333.

№2. Решение.

89 – простое число, значит, делится только на 1 и 89:  
3m и 7n не могут в сумме давать 1, если это натуральные числа, из этого следует, 3m+7n=89

89 в сумме дают:   
12+77=3\*4+7\*11 => 4 и 11, разница – 8  
75+14=3\*25+7\*2 => 25 и 2, разница – 23  
54+35=3\*18+7\*5 => 18 и 5, разница – 13  
33+56=3\*11+7\*8 => 11 и 8, разница – 3

Ответ: 3.

№3. Решение.

Система: x+3y=a  
 x²+xy+4y²≤3  
Выражаем x: x=a-3y  
Подставляем: (a-3y)²+(a-3y)y+4y²≤3  
Раскрываем скобки: a²-3ay+9y²+ay-3y²+4y²-3≤0  
10y²-5ay+a²-3≤0

Функция слева будет принимать отрицательные значения, только если D≥0.

D=(5a)²-4\*10\*(a²-3) =25a²-40a²+120=-15a²+120  
-15a²+120≥0  
15a²-120≤0  
15a²≤120  
a²≤8  
a≤√8  
a≤-√8  
По условию необходимо указать наибольшее.

Ответ: √8.

№4. Решение.

4 корня уравнения имеют вид: ±x1; ±x2, то есть расположены симметрично относительно 0. Если они образуют арифметическую прогрессию, то, представив их на координатной плоскости, можно получить: -3х1; -x1; x1; 3x1.

Теорема Виета:   
(x1)4\*(3x1)4=1 => 81x18=1 => x14=1/9

(x1)4+(3x1)4=-a => 82x14=-a => a=-82x14 => a=-82\*1/9=-82/9

Ответ: -82/9.