

Садертдинова Зуль Дашировна МДГУ СОШ №2 с. Старобайтачево
Байташевский район.

1. Решение:

Используем метод подбора.

Составим закономерность. (до 500 штук монет при разделиении на 13)

- | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| 1) $13 \cdot 1 + 8 = 21$ | 11) $13 \cdot 11 + 8 = 151$ | 22) $13 \cdot 22 + 8 = 294$ |
| 2) $13 \cdot 2 + 8 = 34$ | 12) $13 \cdot 12 + 8 = 164$ | 23) $13 \cdot 23 + 8 = 307$ |
| 3) $13 \cdot 3 + 8 = 47$ | 13) $13 \cdot 13 + 8 = 177$ | 24) $13 \cdot 24 + 8 = 320$ |
| 4) $13 \cdot 4 + 8 = 60$ | 14) $13 \cdot 14 + 8 = 190$ | 25) $13 \cdot 25 + 8 = 333$ |
| 5) $13 \cdot 5 + 8 = 73$ | 15) $13 \cdot 15 + 8 = 203$ | 26) $13 \cdot 26 + 8 = 346$ |
| 6) $13 \cdot 6 + 8 = 86$ | 16) $13 \cdot 16 + 8 = 216$ | 27) $13 \cdot 27 + 8 = 359$ |
| 7) $13 \cdot 7 + 8 = 99$ | 17) $13 \cdot 17 + 8 = 229$ | 28) $13 \cdot 28 + 8 = 372$ |
| 8) $13 \cdot 8 + 8 = 112$ | 18) $13 \cdot 18 + 8 = 242$ | 29) $13 \cdot 29 + 8 = 385$ |
| 9) $13 \cdot 9 + 8 = 125$ | 19) $13 \cdot 19 + 8 = 255$ | 30) $13 \cdot 30 + 8 = 398$ |
| 10) $13 \cdot 10 + 8 = 138$ | 20) $13 \cdot 20 + 8 = 268$ | 31) $13 \cdot 31 + 8 = 411$ |
| | 21) $13 \cdot 21 + 8 = 281$ | 32) $13 \cdot 32 + 8 = 424$ |

- 33) $13 \cdot 33 + 8 = 437$
34) $13 \cdot 34 + 8 = 450$
35) $13 \cdot 35 + 8 = 463$
36) $13 \cdot 36 + 8 = 476$
37) $13 \cdot 37 + 8 = 489$

Всего 37 вариантов.

$13 - 2 = 11$ (пиратов)

Числа 47, 190, 333 делятся на 11 с остатком 3.

$11 - 3 = 8$ (пиратов)

Число 333 делится на 8 с остатком 5.

Ответ: клада состоит из 333 монет.

2. Решение:

$$\frac{89}{(3m+7n)} - \text{натуральное число.}$$

89 - простое число.

$$3m + 7n = 89$$

$$3m = 89 - 7n$$

$$m = \frac{89 - 7n}{3}$$

Рассмотрим несколько случаев:

$$1) n=1, m = \frac{89-7}{3} = \frac{82}{3} \notin N$$

$$2) n=2, m = \frac{89-7 \cdot 2}{3} = \frac{89-14}{3} = \frac{75}{3} = 25$$

$$3) n=3, m = \frac{89-7 \cdot 3}{3} = \frac{89-21}{3} = \frac{68}{3} \notin N$$

$$4) n=4, m = \frac{89-7 \cdot 4}{3} = \frac{89-28}{3} = \frac{61}{3} \notin N$$

$$5) n=5, m = \frac{89-7 \cdot 5}{3} = \frac{89-35}{3} = 18$$

$$6) n=6, m = \frac{89-7 \cdot 6}{3} = \frac{89-42}{3} = \frac{47}{3} \notin N$$

$$7) n=7, m = \frac{89-7 \cdot 7}{3} = \frac{89-49}{3} = \frac{40}{3} \notin N$$

$$8) n=8, m = \frac{89-7 \cdot 8}{3} = \frac{89-56}{3} = \frac{33}{3} = 11$$

$$9) n=9, m = \frac{89-7 \cdot 9}{3} = \frac{89-63}{3} = \frac{26}{3} \notin N$$

$$10) n=10, m = \frac{89-7 \cdot 10}{3} = \frac{89-70}{3} = \frac{19}{3} \notin N$$

$$11) n=11, m = \frac{89-7 \cdot 11}{3} = \frac{89-77}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

$$12) n=12, m = \frac{89-7 \cdot 12}{3} = \frac{89-84}{3} = \frac{5}{3} \notin N$$

$$13) n=13, m = \frac{89-7 \cdot 13}{3} = \frac{89-91}{3} \notin N$$

Значит,

$$\text{если } n=2, \text{ то } m=25; \quad 25-2=23$$

$$\text{если } n=5, \text{ то } m=18; \quad 18-5=13$$

$$\text{если } n=8, \text{ то } m=11; \quad 11-8=3$$

$$\text{если } n=11, \text{ то } m=4; \quad 11-4=7$$

Ответ: натуральные числа m и n могут отличаться на минимальную величину 3.

3. Решение:

Составим систему.

$$\text{Пусть } x+3y=a$$

$$\begin{cases} x+3y=a \\ x^2+xy+4y^2 \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{a-x}{3} \\ x^2+xy+4y^2 \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{a-x}{3} \\ x^2+x\left(\frac{a-x}{3}\right)+4\left(\frac{a-x}{3}\right)^2 \leq 3 \end{cases}$$

Раскроем неравенство:

$$x^2+x\left(\frac{a-x}{3}\right)+4\left(\frac{a-x}{3}\right)^2 \leq 3$$

$$x^2 + \frac{ax-x^2}{3} + 4\left(\frac{a^2-2ax+x^2}{9}\right) - 3 \leq 0$$

$$x^2 + \frac{ax-x^2}{3} + \frac{4a^2-8ax+4x^2}{9} - 3 \leq 0 \quad (\cdot 9)$$

$$9x^2 + 3ax - 3x^2 + 4a^2 - 8ax + 4x^2 - 27 \leq 0$$

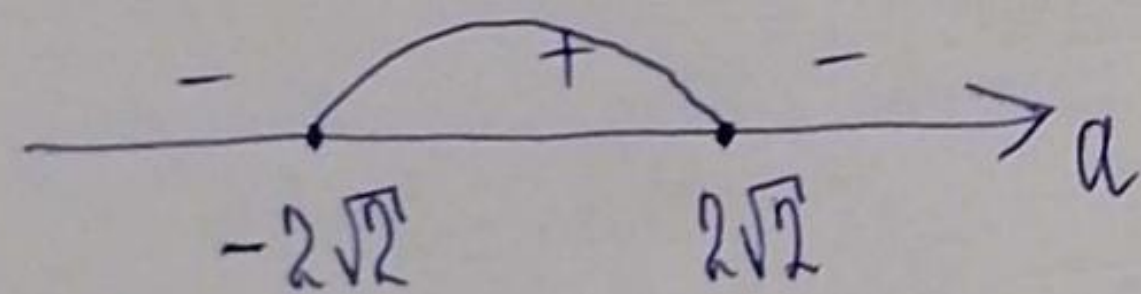
$$10x^2 - 5ax + 4a^2 - 27 \leq 0$$

$$D = (-5a)^2 - 4 \cdot 10(4a^2 - 27) = 25a^2 - 160a^2 + 1080 = 1080 - 135a^2$$

$$1080 - 135a^2 \geq 0$$

$$8 - a^2 \geq 0$$

$$(2\sqrt{2} - a)(2\sqrt{2} + a) \geq 0$$



$$-2\sqrt{2} \leq a \leq 2\sqrt{2}$$

Ответ: наибольшее значение $x+3y = 2\sqrt{2}$.

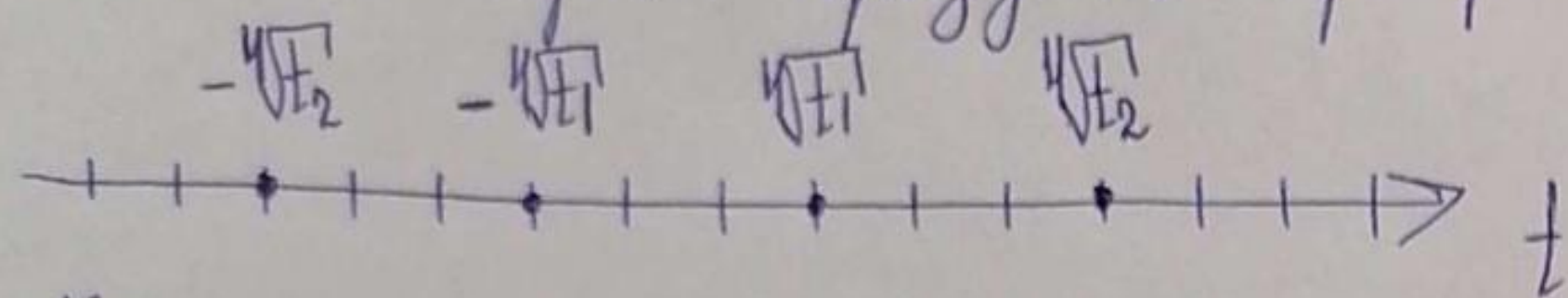
4. Решение.

$$x^8 + ax^4 + 1 = 0.$$

Пусть $x^4 = t$, тогда $t^2 + at + 1 = 0$.

Данное уравнение имеет 4 корня: $\pm \sqrt[4]{t_1}$, $\pm \sqrt[4]{t_2}$.

Эти же корни образуют арифметическую прогрессию.



Корни относятся как: $-3: -1: 1: 3$.

Тогда: $t_1 = 1^4$, $t_2 = (3^4) = 81$

По теореме Виета:

$$t^2 + at + 1 = 0.$$

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = -a \\ t_1 \cdot t_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1^4 + 81 \cdot 1^4 = 82 \cdot 1^4 = -a \\ 1^4 \cdot 81 \cdot 1^4 = 81 \cdot 1^8 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 82 \cdot 1^4 = -a \\ 1^8 = \frac{1}{81} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 82 \cdot 1^4 = -a \\ 1^4 = \frac{1}{9} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 82 \cdot \frac{1}{9} = -a \\ 1^4 = \frac{1}{9} \end{cases}$$

$$82 \cdot \frac{1}{9} = -a$$

$$a = -\frac{82}{9}$$

Ответ: при $a = -\frac{82}{9}$ уравнение $x^8 + ax^4 + 1 = 0$ имеет ровно четыре действительных корня, образующих арифметическую прогрессию.