

Миндзарова Диана Ильинтовна

1. Решение:

Количество монет максимально может быть 500 шт. Поэтому рассмотрим все случаи (до 500), когда монета делится на 13 пиратов и остается 8 монет:

$1 \cdot 13 + 8 = 21$	$15 \cdot 13 + 8 = 203$	$30 \cdot 13 + 8 = 398$
$2 \cdot 13 + 8 = 34$	$16 \cdot 13 + 8 = 216$	$31 \cdot 13 + 8 = 411$
$3 \cdot 13 + 8 = 47$	$17 \cdot 13 + 8 = 229$	$32 \cdot 13 + 8 = 424$
$4 \cdot 13 + 8 = 60$	$18 \cdot 13 + 8 = 242$	$33 \cdot 13 + 8 = 437$
$5 \cdot 13 + 8 = 73$	$19 \cdot 13 + 8 = 255$	$34 \cdot 13 + 8 = 450$
$6 \cdot 13 + 8 = 86$	$20 \cdot 13 + 8 = 268$	$35 \cdot 13 + 8 = 463$
$7 \cdot 13 + 8 = 99$	$21 \cdot 13 + 8 = 281$	$36 \cdot 13 + 8 = 476$
$8 \cdot 13 + 8 = 112$	$22 \cdot 13 + 8 = 294$	$37 \cdot 13 + 8 = 489$
$9 \cdot 13 + 8 = 125$	$23 \cdot 13 + 8 = 307$	
$10 \cdot 13 + 8 = 138$	$24 \cdot 13 + 8 = 320$	
$11 \cdot 13 + 8 = 151$	$25 \cdot 13 + 8 = 333$	
$12 \cdot 13 + 8 = 164$	$26 \cdot 13 + 8 = 346$	
$13 \cdot 13 + 8 = 177$	$27 \cdot 13 + 8 = 359$	
$14 \cdot 13 + 8 = 190$	$28 \cdot 13 + 8 = 372$	
	$29 \cdot 13 + 8 = 385$	

Отберём те числа, которые при делении на 11 в остатке остаётся 3, т.к. осталось 11 пиратов ($13 - 2 = 11$) и лишние 3 монеты:

$$\frac{47}{11} = 4 \frac{3}{11}$$

$$\frac{190}{11} = 17 \frac{3}{11}$$

$$\Rightarrow 47; 190; 333.$$

$$333 : 11 = 3$$

Отберём то число, при делении которого на 8 в остатке остаётся 5, т.к. осталось 8 пиратов ($11 - 3 = 8$) и 5 монет:

$$\frac{47}{8} = 5 \frac{7}{8} - \text{не подходит}$$

$$\frac{190}{8} = 23 \frac{6}{8} - \text{не подходит}$$

$$\frac{333}{8} = 41 \frac{5}{8} - \text{подходит}$$

Таким образом, клад состоит из 333 монет

Ответ: 333.

2. Решение:

$\frac{89}{3m+7n}$ - натуральное число, 89 - простое число.

$$3m+7n=89$$

$$m = \frac{89-7n}{3}$$

Рассмотрим возможные случаи:

$$1) n=1, m = \frac{89-7}{3} = \frac{82}{3} \notin \mathbb{N}$$

$$2) n=2, m = \frac{89-14}{3} = \frac{75}{3} = 25 \in \mathbb{N}$$

$$3) n=3, m = \frac{89-21}{3} = \frac{68}{3} \notin \mathbb{N}$$

$$4) n=4, m = \frac{89-28}{3} = \frac{61}{3} \notin \mathbb{N}$$

$$5) n=5, m = \frac{89-35}{3} = \frac{54}{3} = 18 \in \mathbb{N}$$

$$6) n=6, m = \frac{89-42}{3} = \frac{47}{3} \notin \mathbb{N}$$

$$7) n=7, m = \frac{89-49}{3} = \frac{40}{3} \notin \mathbb{N}$$

$$8) n=8, m = \frac{89-56}{3} = \frac{33}{3} = 11 \in \mathbb{N}$$

$$9) n=9, m = \frac{89-63}{3} = \frac{26}{3} \notin \mathbb{N}$$

$$10) n=10, m = \frac{89-70}{3} = \frac{19}{3} \notin \mathbb{N}$$

$$11) n=11, m = \frac{89-77}{3} = \frac{12}{3} = 4 \in \mathbb{N}$$

$$12) n=12, m = \frac{89-84}{3} = \frac{5}{3} \notin \mathbb{N}$$

$$13) n=13, m = \frac{89-91}{3} = -\frac{2}{3} \notin \mathbb{N}$$

Таким образом, при $n=2, m=25, m-n=25-2=23$

при $n=5, m=18, m-n=18-5=13$

при $n=8, m=11, m-n=11-8=3$

при $n=11, m=4, m-n=11-4=7$

Самое минимальное из полученных значений 3

Ответ: на 3.

3. Решение:

$$x+3y \rightarrow \max$$

$$x^2+xy+4y^2 \leq 3$$

Пусть

$$\begin{cases} x+3y=a, \\ x^2+xy+4y^2 \leq 3 \end{cases} \quad \begin{cases} y=\frac{a-x}{3} \\ x^2+xy+4y^2 \leq 3 \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

Подставим (1) в (2):

$$x^2 + x \left(\frac{a-x}{3} \right) + 4 \left(\frac{a-x}{3} \right)^2 \leq 3$$

$$\frac{9}{9}x^2 + \frac{3ax - x^2}{3} + \frac{4a^2 - 8ax + 4x^2}{9} \leq \frac{9}{3}$$

$$9x^2 + 3ax - 3x^2 + 4a^2 - 8ax + 4x^2 - 27 \leq 0$$

$$10x^2 - 5ax + 4a^2 - 27 \leq 0$$

$$D = (-5a)^2 - 4 \cdot 10(4a^2 - 27) = 25a^2 - 16a^2 + 1080 = -135a^2 + 1080$$

$$-135a^2 + 1080 \geq 0 \quad /: (-135)$$

$$a^2 - 8 \leq 0$$

$$(a - 2\sqrt{2})(a + 2\sqrt{2}) \leq 0$$



$$-2\sqrt{2} \leq a \leq 2\sqrt{2}$$

Ответ: $2\sqrt{2}$

4 Решение:

$$x^8 + ax^4 + 1 = 0$$

Пусть $x^4 = t$, тогда $t^2 + at + 1 = 0$

Данное уравнение имеет 4 корня $\pm \sqrt[4]{t_1}, \pm \sqrt[4]{t_2}$. Они образуют арифметическую прогрессию:

$$\begin{array}{ccccccc} & & -\sqrt[4]{t_2} & & -\sqrt[4]{t_1} & & \sqrt[4]{t_1} & & \sqrt[4]{t_2} \\ & & \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet \\ & & \longleftarrow & & & & \longrightarrow & & \end{array}$$

Отношение корней: $-3 : (-1) : 1 : 3$.

Тогда $t_1 = k^4, t_2 = (3k)^4 = 81k^4$

По теореме Виета получаем:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = -a, \\ t_1 \cdot t_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} k^4 + 81k^4 = 82k^4 = -a \\ k^4 \cdot 81k^4 = 81k^8 = 1 \end{cases}$$

$$81k^8 = 1$$

$$k^8 = \frac{1}{81}$$

$$k^4 = \frac{1}{9}$$

Подставим $k^4 = \frac{1}{9}$ в $82k^4 = -a$:

$$82 \cdot \frac{1}{9} = -a$$

$$a = -\frac{82}{9}$$

Ответ: $-\frac{82}{9}$