206 - 29

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования Башкирский государственный педагогический университет им. М.Акмуллы

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

АКМУЛЛИНСКАЯ ОЛИМПИАДА

по математике

(указать название олимпиады)

Участник Королев Роман Сергеевич

(фамилия имя отчество)

Дата проведения олимпиады

«31» 03 2023 г.

206-28

ЛИСТ ОТВЕТА

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	0	2	2	0	2	2	0	2

140

№1

Самое маленькое число, подходящее под условия задачи (при делении на 4 даёт остаток, равный 3) равно 11 (11 : 4 = 2 (3 ост.)), самое большое = 99.

Прибавив к самому маленькому числу, подходящему под условия задачи, 4, получим число, также подходящее под условия задачи:

11+4=15

15 : 4 = 3 (3 ост.)

Теперь, прибавив к получившемуся числу ещё 4, снова получим число, подходящее под условия задачи:

15+4=19

19 : 4 = 4 (3 ост.)

Таким образом получаем арифметическую прогрессию, первым числом которой является 11, разность соседних элементов равна 4.

Вычислим позицию числа 99 в этой арифметической последовательности:

$\frac{99-11}{4}+1=23$

Теперь вычислим сумму всех элементов арифметической прогрессии от числа 11 до числа 99:

2б

$\frac{11+99}{2}\cdot 23=1265$

Ответ: 1265

№4

Для начала, необходимо найти массу золота в сплаве:

$200г\cdot\frac{2}{2+3}=80г$

Если сплав серебра и золота на 80% состоит из серебра, то золота в нём 20%. Зная это найдём массу такого сплава:

$80:\frac{20\%}{100\%}=400г$.

Так как в сплав добавляют только серебро, то разность масс нового сплава и старого сплава равна массе добавленного серебра.

$400г-200г=200г$

2б

Ответ: 200г

Ответ на 1 стр.

Подпись участника Кор

№5

$x^2-3|x|+1=0$

$$\begin{cases} x^2-3x+1=0 & \text{при } x\geq 0 \\ x^2+3x+1=0 & \text{при } x<0 \end{cases}$$

$x^2-3x+1=0$

$D=9-4=5$

$x_1=\frac{3-\sqrt5}{2}$

$x_2=\frac{3+\sqrt5}{2}$

$x^2+3x+1=0$

$D=9-4=5$

$x_1=\frac{-3-\sqrt5}{2}$

$x_2=\frac{-3+\sqrt5}{2}$

$$\left(\frac{3-\sqrt5}{2}\right)^2+\left(\frac{3+\sqrt5}{2}\right)^2+\left(\frac{-3-\sqrt5}{2}\right)^2+\left(\frac{-3+\sqrt5}{2}\right)^2=\frac{9-6\sqrt5+5}{4}+\frac{9+6\sqrt5+5}{4}+\frac{9+6\sqrt5+5}{4}+\frac{9-6\sqrt5+5}{4}=$$

$$=\frac{(9+5)\cdot4}{4}=14$$

2б

Ответ: 14

№7

$$\sqrt[3]{3}^{\,6+\log_{\frac19}64}=\sqrt[3]{3}^{\,6}\cdot\sqrt[3]{3}^{\,\log_{\frac19}64}=3^2\cdot\sqrt[3]{3}^{\,\frac{\log_3 64}{\log_3\frac19}}=3^2\cdot\sqrt[3]{3}^{\,-\frac{\log_3 64}{2}}=3^2\cdot\frac{1}{\sqrt[6]{64}}=9\cdot\frac12=4{,}5$$

Ответ: 4,5

2б

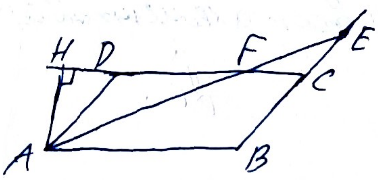
№8

Дано:

ABCD – параллелограмм

$AE\cap CD=F$

$\frac{AF}{FE}=\frac{7}{3}$



Найти:

$\frac{S_{ADF}}{S_{ABCF}}$ – ?

Решение:

$\angle AFD=\angle CFE$ (как вертикальные)

ABCD – параллелограмм => $AD\parallel BC$ => $\angle ADF=\angle ECF$ (как накрест лежащие при параллельных прямых и секущей) $\Big\}$ => $\triangle ADF\sim\triangle EFC$

$\triangle ADF\sim\triangle EFC\Rightarrow\frac{AF}{FE}=\frac{DF}{FC}=\frac{7}{3}\Rightarrow DF=\frac{7CD}{10}$

$S_{ABCD}=CD\cdot AH$

$S_{ADF}=\frac{DF\cdot AH}{2}=\frac{7\cdot CD\cdot AH}{10\cdot2}=0{,}35\cdot CD\cdot AH=0{,}35\,S_{ABCD}$

$S_{ABCF}=S_{ABCD}-S_{ADF}=0{,}65\,S_{ABCD}$

$\frac{S_{ADF}}{S_{ABCF}}=\frac{0{,}35\,S_{ABCD}}{0{,}65\,S_{ABCD}}=\frac{35}{65}=\frac{7}{13}$

2б

Ответ: $\frac{7}{13}$

206-23

ЛИСТ ОТВЕТА

Чугунович

№1 ✓

$x_1 = 11$

$d = 4$

$n = \frac{99-11}{4} = 22$

$x_{23} = 99$

$S = \frac{99+11}{2} \cdot 23 = 1265$

$$\begin{array}{r} 55 \\ \times 23 \\ \hline 165 \\ +110 \\ \hline 1265 \end{array}$$

№4 ✓

$a = 80г$

$b = 120г$

$120 + x = 80 \cdot 4$

$x = 200г$

О: 200г

№7 ✓ ? $\log_{\sqrt{3}} 64$ $\frac{\log_3 64}{\log_3 4}$

$\sqrt[3]{3}^{\,6+\log_{1/3} 64}$

$\sqrt[3]{3}^{\,6} \cdot \sqrt[3]{3}^{\,\log_{1/3} 64}$

$3^2 \cdot \sqrt[3]{3}^{\,-\log_3 64} = 9 \cdot \frac{1}{64} = \frac{9}{64}$; $4{,}5$

$\log_{\frac{1}{9}} 64 = \frac{\log_3 64}{\log_3 \frac{1}{9}} = \frac{\log_3 64}{-2} = \frac{-\log_3 64}{2}$

$\sqrt[3]{3}^{\,6} = 3^{\frac{6}{3}} = 9$ О: $\frac{9}{8}$

№2

$3x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - 3x$

$y = \frac{3}{3x+8}$

$1 - 3x = \frac{3}{3x+8}$ ОДЗ: $x \neq -\frac{8}{3}$

$$\begin{array}{r} 21 \\ \times 21 \\ \hline 21 \\ +42 \\ \hline 441 \end{array}$$

$(1-3x)\cdot(3x+8) = 3$

$3x + 8 - 9x^2 - 24x = 3$

$9x^2 + 21x - 5 = 0$

$D = 21^2 - 4\cdot(-5)\cdot 9 = 441 + 180 = 621$

$3x + y = 1 \Rightarrow x = \frac{1-y}{3}$

$y = \frac{3}{3x+8} \Rightarrow 3x + 8 = \frac{3}{y} \Rightarrow x = \frac{3-8y}{3y}$

$\frac{1-y}{3} = \frac{3-8y}{3y} = \frac{y - y^2 - 3 + 8y}{3y} = 0$ ОДЗ: $y \neq 0$

$y^2 - 9y + 3 = 0$

$D = 81 - 12 = 69$

№3

$4x^2 + 12x + \frac{12}{x} + \frac{4}{x^2} = 47$

$4x^2 + 12x + 12x^{-1} + 4x^{-2} = 47$

$4(x^2 + 3x + 3x^{-1} + x^{-2}) = 47$

$x^2 + x^{-2} + 3(x + x^{-1}) = 11{,}75$

$x^2 + \frac{1}{x^2} + 3x + \frac{3}{x} = 11{,}75$

$\frac{x^4 + 1 + 3x^3 + 3x}{x^2} = 11{,}75$

$x^4 + 1 + 3x^3 + 3x - 11{,}75x^2 = 0$

~~$(x^2(x^2 - 11{,}75) + x(3x^2+3) + 1 = 0)$~~

$4x^2 + 12x + \frac{12}{x} + \frac{4}{x^2} = 47$

$4(x^2 + 3x) + 4(x^{-2} + 3x^{-1}) = 47$

№5 ✓

$x^2 - 3|x| + 1 = 0$

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 1 = 0 & \text{при } x \geq 0 \\ x^2 + 3x + 1 = 0 & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

$x^2 - 3x + 1 = 0$

$D = 9 - 4 = 5$

$x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

$x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

$x^2 + 3x + 1 = 0$

$D = 9 - 4 = 5$

$x_1 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$

$x_2 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$

$\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}-3}{2}\right)^2 + \left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{(9+5+6\sqrt{5}) + (9+5-6\sqrt{5}) + (9+5-6\sqrt{5}) + (9+5+6\sqrt{5})}{4}$

$= \frac{(9+5)\cdot 4}{4} = \frac{56}{4} = 14$

О: 14

Ответ на ________ стр.

Подпись участника ________________

№6

$\cancel{tg x = ctg 3x}$

$tg x + ctg 3x = 0$

$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos 3x}{\sin 3x} = 0$

$\cancel{\sin x}$

$\sin x \cdot \sin 3x = \cos x \cdot \cos 3x$

$\cancel{\sin \ldots \cos 3x}$

$\cancel{tg x + \frac{3}{\sin 3x} + \sin}$

№8

$\triangle AFD \sim \triangle CFE$

($\angle F = \angle F$; $\angle D = \angle C$ накрест лежащие)

$\frac{AF}{FE} = \frac{7}{3} \Rightarrow \frac{DF}{CF} = \frac{7}{3}$

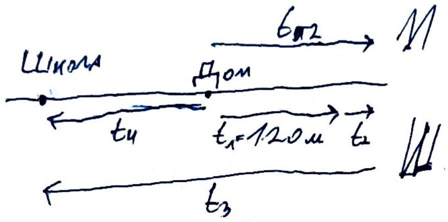
$S_{ABCD} = CD \cdot h$

$S_{ADF} = \frac{DF \cdot h}{2} = \frac{0{,}7 CD \cdot h}{2} = \frac{0{,}7}{2} \cdot S_{ABCD} = 0{,}35 S_{ABCD}$

$S_{AFCD} = S_{ABCD} - S_{ADF} = 0{,}65 S_{ABCD}$

$\frac{S_{ADF}}{S_{AFCD}} = \frac{0{,}35}{0{,}65} = \frac{7}{13}$

№10



$t_1 = 120$ $\frac{\vartheta_м \cdot 120}{}$

$t_2 = \vartheta_м - \vartheta_ш$

$t_2 + t_3 = t_4 + 30$

$t_3 = t_4 + \frac{(t_1 + t_2) \cdot \vartheta_ш}{\vartheta_м}$

$t_3 = t_2 + t_3 - 30 + \frac{(t_1 + t_2)\vartheta_ш}{\vartheta_м}$

$t_2 - 30 + \frac{(t_1 + t_2)\vartheta_ш}{\vartheta_м} = 0$

$30 - t_2 = \frac{(t_1 + t_2)\vartheta_ш}{\vartheta_м}$

$\frac{30 - t_2}{t_1 + t_2} = \frac{\vartheta_ш}{\vartheta_м}$

$\frac{30 - t_2}{120 + t_2} = \frac{\vartheta_ш}{\vartheta_м} \Rightarrow (30 - t_2)\vartheta_м = (120 + t_2)\vartheta_ш$

$30\vartheta_м - t_2\vartheta_м = 120\vartheta_ш + t_2\vartheta_ш$

$30\vartheta_м = 120\vartheta_ш + t_2(\vartheta_ш + \vartheta_м)$

$t_5 = 120 + t_2$

$t_4 + 2t_5 = t_4 + 30$

$2t_5 = 30$

$t_5 = 15$

$t_3 = t_2 + t_4$

$t_1 + t_2 = 135$

$\vartheta_ш \cdot 135 = \vartheta_м \cdot 15 \Rightarrow \frac{\vartheta_м}{\vartheta_ш} = 9$

$4x^2 + 12x + \frac{12}{x} + \frac{4}{x^2} = 47$ ОДЗ: $x \neq 0$

$\frac{4x^4 + 12x^3 + 12x + 4 - 47x^2}{x^2} = 0$

$4x^4 + 12x^3 - 47x^2 + 12x + 4 = 0$

$x^2(4x^2 - 47) + 12x(x+1) + 4 = 0$

$x^3(4x + 12) + (-47x + 12) \cdot x + 4 = 0$

$x(x^2(4x+12) + (-47x) + 12) = -4$

$\frac{9 - \sqrt{69}}{2} \cdot \frac{9 + \sqrt{69}}{2} = \frac{81 - 69}{4}$

$\frac{12}{4} = 3$

№2

$y = 1 - 3x$

$y = \frac{3}{3x+8}$

$1 - 3x = \frac{3}{3x+8}$

$3x - 9x^2 + 8 - 24x = 3$

$9x^2 + 21 - 5 = 0$

$D = 441 + 180 = 621$

$x = \frac{-21 \pm \sqrt{621}}{18} = \frac{-7 \pm \sqrt{69}}{6}$

$621 : 9 = 69$
-54
81
-81
0

$\cancel{y =} x = \frac{1-y}{3}$

$3x + 8 = \frac{3}{y}$

$3x = \frac{3 - 8y}{y}$

$x = \frac{3 - 8y}{3y}$

$\frac{1-y}{3} = \frac{3 - 8y}{3y}$

$y - y^2 - 3 + 8y = 0$

$y^2 - 9y + 3 = 0$

$D = 81 - 12 = 69$

$y = \frac{9 \pm \sqrt{69}}{2}$

$1 - 3\left(\frac{-7 + \sqrt{69}}{6}\right) = \frac{2 + 7 - \sqrt{69}}{2} = \frac{9 - \sqrt{69}}{2}$

206 - 28

ЛИСТ ОТВЕТА

№10

Школьник вышел в 6^{10}, машина за ним поехала в 8^{10}. Пусть этот промежуток времени равен t_1. Затем через t_2 минут машина догнала школьника. Если машина двигается с одинаковой скоростью на протяжении всего пути, то через ещё t_2 минут машина проедет мимо дома. После этого машина будет везти школьника до школы ещё t_3 минут. Так как машина поехала на 20 минут раньше ~~запл~~ запланированного и приехала на 10 минут позже, то разница во времени между запланированным и реальным маршрутом составляет 30 минут.

Таким образом:

$t_3 + t_2 + t_2 = t_3 + 30$

$t_3 + 2t_2 = t_3 + 30$

$2t_2 = 30$

$t_2 = 15$

Школьник вышел в 6^{10}, машина за ним поехала в 8^{10}, следовательно $t_1 = 120$ минут. Таким образом, ~~пусть~~ путь скорость машины равна $v_м$, а скорость школьника равна $v_ш$, получаем следующее равенство

$v_ш \cdot (t_1 + t_2) = v_м \cdot t_2$

$v_ш \cdot (120 + 15) = v_м \cdot 15$

$135 v_ш = v_м \cdot 15 \Rightarrow \frac{v_м}{v_ш} = \frac{135}{15} = 9$

2б

Ответ: машина быстрее школьника в 9 раз.

№2

$3x + y = 1 \Rightarrow x = \frac{1-y}{3}$

$y = \frac{3}{3x+8} \Rightarrow x = \frac{3-8y}{3y}$

$\frac{1-y}{3} = \frac{3-8y}{3y}$

$1 - y = \frac{3-8y}{y}$

$y - y^2 - 3 + 8y = 0$

$y^2 - 9y + 3 = 0$

$D = 81 - 12 = 69$

$y_1 = \frac{9-\sqrt{69}}{2}$

$y_2 = \frac{9+\sqrt{69}}{2}$

ОДЗ: $y \neq 0$

$\frac{9-\sqrt{69}}{2} \cdot \frac{9+\sqrt{69}}{2} = \frac{(9-\sqrt{69})(9+\sqrt{69})}{4} = \frac{81-69}{4} = \frac{12}{4} = 3$

Ответ: 3

2б

Ответ на 2 стр.

Подпись участника Кор