306-13

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования Башкирский государственный педагогический университет им. М.Акмуллы

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

АКМУЛЛИНСКАЯ ОЛИМПИАДА

по математике

(указать название олимпиады)

Участник Нгуен Хань Туен

(фамилия имя отчество)

Дата проведения олимпиады

«31» марта 2023 г.

306-13

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	1	2	2	2	1	2	2	2	2

18

ЛИСТ ОТВЕТА

№1

Первое число этой прогрессии $a_1 = 11$, далее каждое следующее число на 4 больше предыдущего, т.е. $d = 4$. Последнее число данной прогрессии $a_n = 99$ $(n=23)$. ~~Сумма всех чисел $S_n = a_1$~~ Всего 23 ~~таких~~ двузначных чисел, дающих остаток 3 при делении на 4. Сумма всех чисел $S_n = \frac{a_1+a_n}{2}\cdot n =$

$= \frac{11+99}{2}\cdot 23 = 1265$

Ответ: 1265

№2

$3x+y=1$ и $y=\frac{3}{3x+8}$ 　 $D(y)$: $x \neq -\frac{8}{3}$, $x \neq -2\frac{2}{3}$

$y = -3x+1$ и $y=\frac{3}{3x+8}$

$y=-3x+1 \cap y=\frac{3}{3x+8} \Rightarrow -3x+1=\frac{3}{3x+8}$

$-9x^2-21x+8=3$

$9x^2+21x-5=0$

$D=21^2+4\cdot 9\cdot 5 = 3^2\cdot 7^2+4\cdot 3^2\cdot 5 = 3^2(49+20)=3^2\cdot 69$

$x_{1,2}=\frac{-21\pm 3\sqrt{69}}{18}=\frac{-7\pm\sqrt{69}}{6}$

$y_1=-3\cdot\left(\frac{-7+\sqrt{69}}{6}\right)+1=\frac{7-\sqrt{69}}{2}+1=\frac{9-\sqrt{69}}{2}$

$y_2=-3\cdot\left(\frac{-7-\sqrt{69}}{6}\right)+1=\frac{7+\sqrt{69}}{2}+1=\frac{9+\sqrt{69}}{2}$

~~$y_1\cdot y_2=(8-\sqrt{69})(8+\sqrt{69})=64-69=-5$~~

$y_1\cdot y_2=\frac{9-\sqrt{69}}{2}\cdot\frac{9+\sqrt{69}}{2}=$

$=\frac{81-69}{2}=\frac{12}{2}=6$

Ответ: 6

№3

$4x^2+12x+\frac{12}{x}+\frac{4}{x^2}=47$ $\mid \cdot x^2$ ~~ОДЗ: $x\neq 0$~~

~~$4x(x+3)+\frac{12x+4}{x^2}=47$~~

~~$4x^4+12x^3+12x+4=47x^2$~~

$4x^4+12x^3+12x+4=47x^2$

~~$4x(x+3)+4($~~

Ответ на _______ стр. 　　　 Подпись участника________________

$(20+1)^2 = 400 + 40 + 1 = 441 +$
$+180 = 621 = 3 \cdot 207 = 3 \cdot 9 \cdot 23 = 3\sqrt{69}$

$4n+3$

3 7 11 15 19

$x_{1,2} = \dfrac{-21 \pm 3\sqrt{69}}{9} = \dfrac{-7 \pm \sqrt{69}}{3}$

$y_1 = 7 - \sqrt{69} + 1 = 8 - \sqrt{69}$

$y_2 = 7 + \sqrt{69} + 1 = 8 + \sqrt{69}$

$64 - 69 = -5$

$55 \cdot 23 = 165 + 1110 = 1265$

$(x+1)^4 = x^4 + 3x^3 + 3x^2 +$
$(x^2+2x+1)(x^2+2x+1)$
$= x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x^3$

№3

$4x^2 + 12x + \dfrac{12}{x} + \dfrac{4}{x^2} = 47$ ОДЗ: $x \neq 0$

$4\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) + 12\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = 47$

$4\left(x^2 + 2 + \dfrac{1}{x^2}\right) + 12\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = 55$

$4\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 + 12\left(x + \dfrac{1}{x}\right) - 55 = 0$

Пусть $x + \dfrac{1}{x} = t$. Тогда $4t^2 + 12t - 55 = 0$

$D' = 6^2 + 4 \cdot 55 = 36 + 220 = 256$

$t_1 = \dfrac{-6+16}{4} = \dfrac{5}{2}$ $t_2 = \dfrac{-6-16}{4} = \dfrac{-22}{4} = -\dfrac{11}{2}$

$x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{5}{2} \quad | \cdot 2x$ или $x + \dfrac{1}{x} = -\dfrac{11}{2} \quad | \cdot 2x$

$2x^2 + 2 = 5x$

$2x^2 - 5x + 2 = 0$

$D = 25 - 16 = 9$

$x_1 = \dfrac{5+3}{4} = 2$ $x_2 = \dfrac{5-3}{4} = \dfrac{1}{2}$

$2x^2 + 2 = -11x$

$2x^2 + 11x + 2 = 0$

$D = 121 - 16 = 105$

$x_{3,4} = \dfrac{-11 \pm \sqrt{105}}{4}$ - ~~ошибка при вычислении~~

+ 25

Ответ: $\dfrac{-11-\sqrt{105}}{4}$; $\dfrac{-11+\sqrt{105}}{4}$; $\dfrac{1}{2}$; 2.

306-13

ЛИСТ ОТВЕТА

№4

	Серебро	Золото	~~Старый~~ Сплав ~~Новый сплав~~
До	$3x$ г	$2x$ г	200 г
После	$(3x+y)$ г	$2x$ г	$(200+y)$ г

Пусть было $3x$ г серебра и $2x$ г золота, добавили y г серебра. Тогда, $\begin{cases} 3x+2x=200, \\ 3x+y=0{,}8(200+y); \end{cases}$

$\begin{cases} x=40, \\ 3\cdot 40+y=160+0{,}8y; \end{cases}$ $\begin{cases} x=40, \\ 0{,}2y=40; \end{cases}$ $\begin{cases} x=40, \\ y=200; \end{cases}$

Ответ: нужно добавить 200 г серебра.

№5

$x^2-3|x|+1=0$

$|x|^2-3|x|+1=0$

$D=9-4=5$

$|x|_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

$|x|=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ или $|x|=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

$x_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ ~~или~~ $x_2=\frac{-(3+\sqrt{5})}{2}$ $x_3=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ $x_4=-\frac{(3-\sqrt{5})}{2}$

~~Отв~~ $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2+\left(-\frac{(3+\sqrt{5})}{2}\right)^2+\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2+\left(-\frac{(3-\sqrt{5})}{2}\right)^2=$

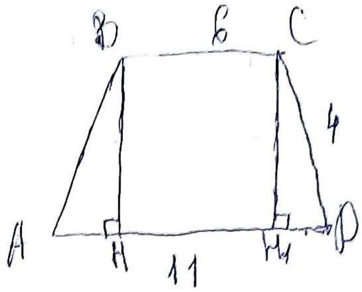
$=\frac{9+6\sqrt{5}+5}{4}+\frac{9+6\sqrt{5}+5}{4}+\frac{9-6\sqrt{5}+5}{4}+\frac{9-6\sqrt{5}+5}{4}=\frac{14+\cancel{6\sqrt{5}}+14+\cancel{6\sqrt{5}}+14-\cancel{6\sqrt{5}}+14-\cancel{6\sqrt{5}}}{4}=$

$=\frac{14\cdot 4}{4}=14$

Ответ: 14

Ответ на _______ стр. Подпись участника____________

№6



Дано: ABCD - трапец., BH, CH_1 - высоты
BC = 6 см, AD = 11 см, CD = 4 см
$\angle A + \angle D = 90°$
Найти: S_{ABCD}
Решение: Р/м $\triangle ABH$ пр/уг
$\angle A + \angle ABH = 90°$, $\angle A + \angle D = 90° \Rightarrow \angle ABH = \angle D$
Р/м $\triangle ABH$ и $\triangle CDH_1$ пр/уг
$\angle ABH = \angle D$, $BH = CH_1$ (расстояние между паралл. пр.) $\Rightarrow \triangle ABH = \triangle CDH_1$ (по кат. и остр. $\angle$) $\Rightarrow CH_1 = AH = BH = DH_1 \Rightarrow \triangle ABH, \triangle CDH_1$ р/б

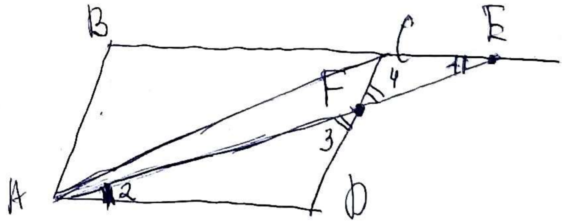
Р/м $\triangle CDH_1$ пр/уг р/б
По т. Пифагора: $CD = CH_1\sqrt{2}$

$$CH_1 = \frac{CD}{\sqrt{2}} = \frac{CD\sqrt{2}}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \text{ см}$$

$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot CH_1 = \frac{6+11}{2} \cdot 2\sqrt{2} = 17\sqrt{2} \text{ см}^2$$

Ответ: $17\sqrt{2}$ см^2

№7



Дано: ABCD - п/м
AF : FE = 7 : 3
Найти: $\frac{S_{ABCF}}{S_{AFD}}$
Решение: Р/м $\triangle AFD$ и $\triangle EFC$
$\angle 1 = \angle 2$ (н/л $\angle$), $\angle 3 = \angle 4$ (верт. $\angle$) $\Rightarrow \triangle AFD \sim \triangle EFC$ (по 2 $\angle$) $\Rightarrow \frac{DF}{CF} = \frac{AF}{FE} = \frac{7}{3}$
Р/м $\triangle AFD$, $\triangle AFC$
$\frac{DF}{CF} = \frac{7}{3} \Rightarrow \frac{S_{AFD}}{S_{AFC}} = \frac{7}{3}$
Пусть $S_{AFD} = 7S$, $S_{AFC} = 3S$.
Р/м $\triangle ABC$, $\triangle CDA$
$AB = CD$, $BC = AD$, $\angle B = \angle D$ (св-ва п/м-а) $\Rightarrow \triangle ABC = \triangle CDA$ (по СУС) $\Rightarrow S_{ABC} = S_{CDA} = S_{AFD} + S_{AFC} = 10S$
$S_{ABCF} = S_{ABC} + S_{AFC} = 13S$

$$\frac{S_{ABCF}}{S_{AFD}} = \frac{13S}{7S} = \frac{13}{7}$$

Ответ: в отношении 13 : 7.

AnyScanner

306-13

ЛИСТ ОТВЕТА

№8

Пусть $v_ш$ - ск-ть школьника, $v_м$ - ск-ть машины, $t_ш$ - время движения школьника, $t_м$ - время, за которое машина догнала школьника, $t_м'$ - время, за которое машина доехала до дом

$t_ш = t_м + 2ч$, $S_ш = S_м$

$v_ш t_ш = v_м t_м \Rightarrow \frac{v_м}{v_ш} = \frac{t_ш}{t_м} = \frac{t_м+2}{t_м}$

Школьник опоздал на 10 минут, значит машина доехала до дома в 8^{40}, значит $t_м' = 30$ мин $= \frac{1}{2}$ ч

$S_м' = 2S_м \Rightarrow t_м = \frac{1}{2} t_м' = \frac{1}{4}$ ч

$\frac{v_м}{v_ш} = \frac{2+\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = 9$

Ответ: скорость машины превышала скорость школьника в 9 раз.

№9

$(a^2-5a+3)x^2+(3a-1)x+2=0$

$D = (3a-1)^2 - 4\cdot(a^2-5a+3)\cdot 2 = 9a^2-6a+1-8a^2+40a-24 = a^2+34a-23$

$x_1 = \frac{1-3a+\sqrt{a^2+34a-23}}{2(a^2-5a+3)}$ $x_2 = \frac{1-3a-\sqrt{a^2+34a-23}}{2(a^2-5a+3)}$

~~$\sqrt{a^2+34a-23} \geq 0 \Rightarrow x_1 \geq x_2 \Rightarrow x_1 = 2x_2$~~ $x_1 = 2x_2$ или $x_2 = 2x_1$

1) $\frac{1-3a+\sqrt{a^2+34a-23}}{2(a^2-5a+3)} = 2\cdot\frac{1-3a-\sqrt{a^2+34a-23}}{2(a^2-5a+3)} \Big| \cdot 2(a^2-5a+3)$

ОДЗ: $a^2+34a-23 \geq 0$
$a^2-5a+3 \neq 0$

$1-3a+\sqrt{a^2+34a-23} = 2-6a-2\sqrt{a^2+34a-23}$

$3\sqrt{a^2+34a-23} = 1-3a$

$\sqrt{a^2+34a-23} = \frac{1-3a}{3} \Big| \uparrow 2$

$a^2+34a-23 = \frac{1-6a+9a^2}{9}$

$\cancel{9a^2}+306a-207 = 1-6a+\cancel{9a^2}$

$312a = 208$

$a = \frac{2}{3}$

Проверка: $\frac{4}{9}+\frac{68}{3}-23 = 22\frac{2}{3}+\frac{4}{9}-23 = 22\frac{10}{9}-23 = \frac{1}{9} > 0$

$\frac{4}{9}-\frac{10}{3}+3 = \frac{4}{9}-3\frac{1}{3}+3 = \frac{4}{9}-\frac{1}{3} \neq 0$

Ответ на ________ стр. Подпись участника ____________

№9

2) $\frac{1-3a-\sqrt{a^2+34a-23}}{2(a^2-5a+3)} = \frac{2(1-3a-\sqrt{a^2+34a-23})}{2(a^2-5a+3)} \Big| \cdot 2(a^2-5a+3)$

ОДЗ: $a^2+34a-23 \geq 0$

$a^2-5a+3 \neq 0$

$1-3a-\sqrt{a^2+34a-23} = 2-6a-2\sqrt{a^2+34a-23}$

$\sqrt{a^2+34a-23} = 1-3a \quad |\uparrow 2$

$a^2+34a-23 = 1-6a+9a^2$

$8a^2-40a+24=0 \quad |:8$

$a^2-5a+3=0$ – не уд. ОДЗ $\varnothing$

Ответ: $a=\frac{2}{3}$

№10

$\frac{6K^2-7K+20}{3K-5} = \frac{(3K-5)(2K+1)+25}{3K-5} = 2K+1+\frac{25}{3K-5}$

$K \in Z \Rightarrow 2K+1+\frac{25}{3K-5} \in Z$ при условии $\frac{25}{3K-5} \in Z \Rightarrow 25 \vdots 3K-5$

$3K-5=n$, $n=\pm1; \pm5; \pm25$

$K=\frac{n+5}{3}$

$K=2; \frac{4}{3}; \frac{10}{3}; 0; 10; -\frac{20}{3}$ – $\notin Z \Rightarrow K=2;0;10$

Наибольшее число $K=10$