ЧРЧ-4

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования Башкирский государственный педагогический университет им. М.Акмуллы

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

АКМУЛЛИНСКАЯ ОЛИМПИАДА

по математике.

(указать название олимпиады)

Участник Хафизов Вадим Рудилевич

(фамилия имя отчество)

Дата проведения олимпиады

«31» марта 2023 г.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	2	2	1	1	2	1	1	0

~~13б~~ 14б

404-4

ЛИСТ ОТВЕТА

№1 Такие числа образуют арифм. прогрессию: $a_n = 4n+3$. $n_{min} = 2$, т.к. при $n < n_{min}$ $a_n < 10$, $n_{max} = 24$, т.к. при $n > n_{max}$ $a_n > 99$. Следовательно, S – сумм. арифметической прогрессии – таких чисел: $S = \frac{a_2 + a_{24}}{2}(24-2+1) = \frac{99+11}{2} \cdot 23 = 55 \cdot 23 = 1265$ 14б

Ответ: 1265 2б

№2 $3x+y=1$ пересекается с $y = \frac{3}{3x+8}$, поэтому имеет место быть система:

$\begin{cases} 3x+y=1 & (1) \\ y = \frac{3}{3x+8} & (2) \end{cases}$ | из (1) $\Rightarrow$ $3x+8 = 9-y$. Подставим это в (2):

$y = \frac{3}{9-y} \Leftrightarrow y^2 - 9y + 3 = 0$, $y=9$ – не корень.

По теореме Виета $y_1 y_2 = 3$ – искомая величина.

Ответ: 3 2б

№4 Пусть x – кол-во граммов серебра, которое нужно добавить.

$120 = \frac{3}{5} \cdot 200$ – количество серебра. Составим уравнение:

$\frac{120+x}{200+x} = \frac{80}{100} = \frac{8}{10} \Leftrightarrow 120 + x = 0{,}8 \cdot 200 + 0{,}8x \Rightarrow x = \frac{40}{0{,}2} = 200.$

Ответ: 200 г 2б

№3 $4x^2 + 12x + \frac{12}{x} + \frac{4}{x^2} = 47$

$4\left[\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(\frac{1}{x} + x\right)\right] = 47$, из-за $t = \frac{1}{x} + x$, тогда $t^2 = \frac{1}{x^2} + x^2 + 2$
$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$. Получаем:

$4(t^2 - 2 + 3t) = 47$

$4t^2 + 12t - 55 = 0$. ($D = 144 + 16 \cdot 55 = 1024 = 32^2$) Вернёмся к уравнению $t = \frac{1}{x} + x$:

$t_1 = \frac{-12+32}{8} = \frac{5}{2}$; $t_2 = \frac{-12-32}{8} = -\frac{11}{2}$.

$\left[\begin{array}{l} \frac{5}{2} = \frac{1}{x} + x \\ -\frac{11}{2} = \frac{1}{x} + x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0 \\ x^2 + \frac{11}{2}x + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2x^2 - 5x + 2 = 0 & (1) \\ 2x^2 + 11x + 2 = 0 & (2) \end{array}\right.$

(1): $D = 25 - 4^2 = 3^2$.

$x_1 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$; $x_2 = \frac{5+3}{4} = 2$;

(2) $D = 121 - 4 \cdot 4 = 105$.

$x_1 = \frac{-11 + \sqrt{105}}{4}$; $x_2 = \frac{-11 - \sqrt{105}}{4}$.

1б

Ответ: $\frac{1}{2}$; 2; $\frac{-11+\sqrt{105}}{4}$; $\frac{-11-\sqrt{105}}{4}$.

№5 $x^2 - 3|x| + 1 = 0$. | Если x – корень, тогда $-x$ – тоже корень., значит $x^2 + (-x)^2 = 2x^2$.

ОДЗ.

Пусть $x \geq 0$, тогда

$x^2 - 3x + 1 = 0$

$D = 9 - 4 = 5$

$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} > 0$, Значит искомая величина равна $2x_1^2 + 2x_2^2$

$x_1^2 = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}$; $x_2^2 = \frac{7-3\sqrt{5}}{2}$. Тогда $2x_1^2 + 2x_2^2 = \frac{2}{2}(7+7) = 14$.

см. след. страну.

Ответ: 14. ~~1~~ 2б

Подпись участника

Ответ на ______ стр.

№6 $tg x = ctg 3x = \frac{1}{tg 3x}$.

$tg 3x = tg(2x+x) = \frac{tg 2x + tg x}{1 - tg 2x \cdot tg x} \Big\| tg 2x = \frac{2 tg x}{1 - tg^2 x} \Big\| = \frac{tg x(3 - tg^2 x)}{1 - 3tg^2 x}$.

$tg x \| \frac{1}{tg x} = \frac{1 - 3tg^2 x}{3 - tg^2 x}$, $t = tg^2 x$

$t = \frac{1 - 3t}{3 - t} \Leftrightarrow t^2 - 6t + 1 = 0$

$D = 36 - 4 = (4\sqrt{2})^2$.

$t_{1,2} = \frac{6 \pm 4\sqrt{2}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{2} > 0$.

$tg^2 x = 3 \pm 2\sqrt{2} > 0$

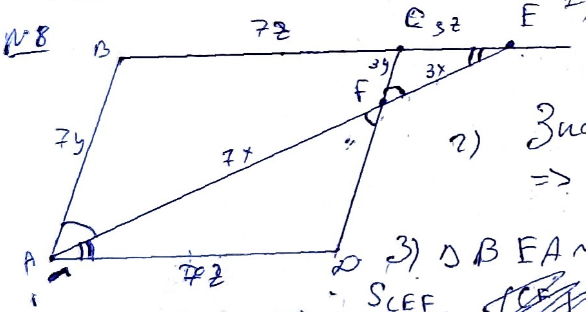
$tg x = \pm\sqrt{3 \pm 2\sqrt{2}}$ | Заметим, что решения уравнения $tg x = a$ имеет вид $x = arctg\, a + \pi k, k \in Z$. Функция $arctg\, x$ возрастает на $\mathbb{R}$. И, так как нас интересуют корни ~~от~~ на $[0; \pi]$, то очевидно, что если $arctg\, a < 0$, то симметричный корень ему попадёт во 2-ю четверть тригонометра, что нам не подходит. Так как $arctg(-a) = -arctg\, a$, то ~~корни~~ не имеет смысла рассматривать уравнения $tg x = \sqrt{3 \pm 2\sqrt{2}}$. Знач. имеет место быть. $x_{min} = arctg\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$, т.к. $arctg\, x$ возрастает и очевидно, что $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} < \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$. 1б

Ответ: $arctg\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$

№7 $(\sqrt[3]{3})^{6 + \log_{\frac{1}{3}} 64} = 3^{\frac{1}{3}(6 - \log_9 64)} = 3^{2 - \frac{1}{3}\log_3 8} = 3^{2 - \log_3 2} = \frac{3^2}{3^{\log_3 2}} = \frac{9}{2} = 4,5$ 2б

Ответ: 4,5

№8



1) $\angle FAD = \angle FEC$ (н/л и $BC \parallel AD$)
$\angle AFD = \angle CFE$ (вертикальные)
$\angle BAF = \angle CFE$ (соотв. и $AB \parallel CD$)
Знач. $\triangle AFD \sim \triangle EFC$ (по двум углам) $\Rightarrow$

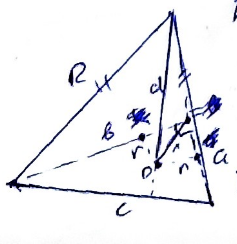
2) $\Rightarrow \frac{EF}{AF} = \frac{CF}{AB} = \frac{3}{7}$; $\frac{S_{CFE}}{S_{AFD}} = \left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{9}{49} \Rightarrow S_{AFD} = \frac{49}{9} S_{CFE}$

3) $\triangle BEA \sim \triangle CEF$ (по двум углам $\angle E$ - общий) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{S_{CEF}}{S_{BEA}} = \left(\frac{CE}{BE}\right)^2 = \frac{9}{100} \Rightarrow S_{BEA} = \frac{100}{9} S_{CEF}$

но $S_{BEA} = S_{ABCF} + S_{CFE}$, значит $S_{ABCF} = \frac{91}{9} S_{CEF}$, тогда AE делит площадь параллелограмма как $\frac{S_{ABCF}}{S_{AFD}} = \frac{91}{9} \cdot \frac{9}{49} = \frac{91}{49}$

Ответ: 91:49 1б

№9 Пусть $a = 10\sqrt{2} = 5 \cdot 2\sqrt{2}$, $b = 24\sqrt{2} = 12 \cdot 2\sqrt{2}$, $c = 26\sqrt{2} = 13 \cdot 2\sqrt{2}$. Заметим, что $a^2 + b^2 = c^2$, тогда треугольник с этими сторонами — прямоугольный. Дана пирамида. высота падает в центр вписанной окружности. Найдём r по формуле $S = pr$: $\frac{ab}{2} = \frac{a+b+c}{2} r \Rightarrow$



$\Rightarrow r = \frac{ab}{a+b+c} = 4\sqrt{2}$. расстояние от прямого угла до центра окружности равен $x = r\sqrt{2} = 8$. тогда $x^2 = 64$. x — проекция радиуса на данную что стоит, по этому $x^2 + d^2 = R^2$

см. другой. лист.

464-4

ЛИСТ ОТВЕТА

$R^2 = 64 + (4\sqrt{7})^2 = 64 + 16 \cdot 7 = 16(4+7) = 11 \cdot 16$. Площадь полной поверхности шара равна $S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 11 \cdot 16 = 64 \cdot 11\pi = 704\pi$

Ответ: 704π 1б

№16 По условию. Они опоздали на 10 минут, значит за 10 минут они доехали. ~~Тогда~~ в 8^{30} машина догнала мальчика и в 8^{10} встретилась за ним, тогда ~~она~~ машина ехала 20 минут. Пусть $t = 20$ мин $= \frac{1}{3}$ ч, v - скорость мальчика, V - скорость машины; $(2+t)v$ - расстояние, которое мальчик пробежал, и Vt - расстояние, которое машина проехала в погоне за ним, ~~тогда~~.

но тогда $(2+t)v = Vt \Rightarrow \left(2 + \frac{1}{3}\right) \cdot v = V \cdot \frac{1}{3}$.

$\frac{7}{3}v = \frac{V}{3} \Rightarrow V = 7v$. Значит, скорость машины больше скорости мальчика в 7 раз.

Ответ: 7 раз. 0б.

Ответ на ________ стр. Подпись участника________________

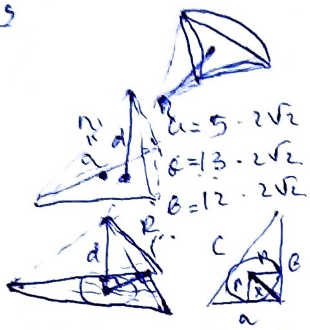
Черновик

404-4

ЛИСТ ОТВЕТА

84
64
704

№9



$13^2 = 169$
$12^2 = 144$
$5^2 = 25$

$a = 5 \cdot 2\sqrt{2}$
$b = 13 \cdot 2\sqrt{2}$
$c = 12 \cdot 2\sqrt{2}$

$S = \frac{1}{2}ab = \frac{a+b+c}{2} r$

$r = \frac{ab}{a+b+c} = \frac{480}{60\sqrt{2}} = \frac{48}{6\sqrt{2}} = \frac{24 \cdot 2}{6\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$

$x^2 = 16 \cdot 2 = 32$

Д.О.Р: $R^2 = d^2 + x^2 = 7 \cdot 16 + 32 = 16(7+16) = 16(23)$

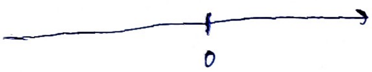
$S_{сф} = 4\pi R^2 = 4\pi \, 230 = \underline{920\pi}$

№10

$t_1 = 22$

80
12

$\frac{S}{V}$



$(2+t)v = Vt$

$2v + vt = Vt$

~~$2v = (v-V)t$~~

$2v = (V-v)t$

$t = \frac{2v}{V-v}$ $\frac{1}{3}V = \frac{7}{3}v$

$V = 7v$

$Vt + S$

8.40
8.30

$t = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$

Ответ на _______ стр.

Подпись участника________________

Ворисевич

404.4

ЛИСТ ОТВЕТА

№1 $a_n = 4n+3$, 8

$4n+3 \geq 10$ $\quad 4n+3 \leq 100$ $\quad 98|4$

$4n \geq 7$ $\quad 4n \leq 97$

$n = 2$ $\quad a_2 = 11$ $\quad n \leq 24$

$a_n = 4n-1$

$a_3 = 11$

$a_{25} = 4 \cdot 25 - 1 = 99$

$25 - 3 + 1 = 23$

$a_{24} = 24 \cdot 4 + 3 = 96 + 3 = 48$

$S_n = \frac{a_2 + a_{24}}{2} \cdot (24-4+1) = \frac{11+99}{2} \cdot 23 = \frac{110}{2} \cdot 23 = 55 \cdot 23$

$24 - 2 + 1 = 23$

$11 \cdot 115 = 1265$

№2 $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ y = \frac{3}{3x+8} \end{cases} \Rightarrow 3x = 1-y$

$3x + 8 = 9 - y$

$y = \frac{3}{9-y} = y(9-y) - 3 = 0$

$9y - y^2 - 3 = 0$

$y^2 - 9y + 3 = 0$ $\quad y = 9$ – не кн.

$81 - 81 + 3 \neq 0$

$\Rightarrow$ по т. В. $\quad y_1 y_2 = 3$

№3 $4x^2 + 12x + \frac{12}{x} + \frac{4}{x^2} = 47$

$4\left[\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(3x + \frac{3}{x}\right)\right] = 47$

$t = x + \frac{1}{x}$

$t^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot x = 2 + x^2 + \frac{1}{x^2}$

$x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$

$105 | 5$, 21, $7 \cdot 3 \cdot 5$

$5 - 2 = 3$

$4(t^2 - 2) + 12t = 47$

$4t^2 - 8 + 12t - 47 = 0$

$4t^2 + 12t - 55 = 0$

$16 \cdot 55 = 80 \cdot 11 = 880$ $\quad 2^{10} = 2^5 = 32$

$64 - 7 = 60 - 3 = 57$

$121 - 16 = 105$

$D = 144 + 16 \cdot 55 = 880 + 144 = 1024 = 32^2$

$t = \frac{-12 \pm 32}{8} = \frac{-3 \pm 8}{2} = \left\{\frac{-3-8}{2}; \frac{-3+8}{2}\right\} = \left\{-\frac{11}{2}; \frac{5}{2}\right\}$

$\left[\begin{array}{l} x + \frac{1}{x} = -\frac{11}{2} \\ x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \end{array}\right.$

~~$x^2 + \frac{11}{4}x + 1 = 0$~~

~~$4x^2 + 11x + 4 = 0$~~

~~$D = 121 - 16 \cdot 4 = 121 - 64 = 57$~~

~~$x = \frac{-11 \pm \sqrt{57}}{8}$~~

~~$x^2 + 1 - \frac{5}{4}x = 0$~~

~~$4x^2 - 5x + 4 = 0$~~

~~$D = 25 - 4^3 < 0 \Rightarrow$~~ $x \notin \mathbb{R}$

$x^2 + 1 + \frac{11}{2}x = 0$

$2x^2 + 2 + 11x = 0$

$D = 121 - 4 \cdot 4 = 121 - 16 = 105$

$x_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{105}}{4}$

$x^2 + 1 - \frac{5}{2}x = 0$

$2x^2 + 2 - 5x = 0$

$D = 25 - 4 \cdot 4 = 25 - 16 = 9 = 3^2$

$x_{3,4} = \frac{5 \pm 3}{4} = \left\{\frac{5+3}{4}; \frac{5-3}{4}\right\} = \left\{2; \frac{1}{2}\right\}$

$x^2 - 3|x| + 1 = 0$

если x – корень то $-x$ – тоже кор.

Пусть $x \geq 0$:

$x^2 - 3x + 1 = 0$

$D = 9 - 4 = 5$

$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} > 0$, зн. и $-x_1$ и $-x_2$ – корни ур.

$5 \cdot 5 = 155$

$x_1^2 = \frac{3^2 + 5 + 6\sqrt{5}}{4} = \frac{14 + 6\sqrt{5}}{4} = \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}$

$x_2^2 = \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}$

~~$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_1 - x_1 + x_2 - x_2$~~ $= 0$

$2x_1^2 + 2x_2^2 = 2(x_1^2 + x_2^2)$

Ответ на _______ стр.

Подпись участника_______________

$2(x_1^2 + x_2^2) = \frac{2}{2}(7 + \cancel{3\sqrt{5}} + 7 - \cancel{3\sqrt{5}}) = 14$

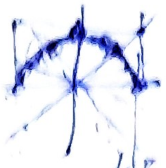
№6 $tg\,x = ctg\,3x$

$f(x) = tg\,x - ctg\,3x = 0$

$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{(3x)'}{\sin^2 x} \quad \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{3}{\sin^2 x} > 0$

не более одного корня

$(tg\,x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \ (ctg\,x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$



$\left(\frac{1}{tg\,x}\right)' \quad (tg\,x)' - \frac{1}{tg^2 x} \quad \frac{1}{\cos^2 x}$

$3^{\frac{1}{2}(6 - \log_3 64)} = 3^{3 - \frac{1}{2}\log_3 64} = 3^{3 - \frac{1}{2}\log_3 8}$

$= 3^{2 - \log_3 2} = 3^2 : 3^{\log_3 2} = \frac{3^2}{2} = \frac{9}{2} = 4{,}5. \quad 3 \neq 0, \ x \neq 3$

$tg\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad ctg\frac{\pi}{3} \quad tg\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \quad tg\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

$ctg\,\pi \quad ctg(0) = \infty$

$tg\frac{5\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}; \ ctg\frac{5\pi}{3}$

$tg\,2\alpha = \frac{2tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha};$

$ctg\,3x = \frac{1}{tg\,3x}$

$1 = ctg\left(\frac{\pi}{4}\right); \ ctg\frac{\pi}{4} = 1$

$tg(3x) = \frac{tg\,x + tg\,2x}{1 - tg\,x\,tg\,2x} = \frac{tg\,x + \frac{2tg\,x}{1 - tg^2 x}}{1 - \frac{2tg^2 x}{1 - tg^2 x}} = \frac{\frac{tg\,x - tg^3 x + 2tg\,x}{1 - tg^2 x}}{\frac{1 - tg^2 x - 2tg^2 x}{1 - tg^2 x}} = \frac{tg\,x - tg^3 x + 2tg\,x}{1 - tg^2 x - 2tg^2 x} =$

$= \frac{tg\,x(1 - tg^2 x + 3)}{1 - 3tg^2 x} = \frac{tg(3 - tg}{1 - 3tg}$

$tg\,x = \frac{1}{tg\,x}\left(\frac{3 - tg^2 x}{1 - 3tg^2 x}\right)^{-1} = \frac{1}{tg\,x}\ \frac{1 - 3tg^2 x}{3 - tg^2 x}$

$tg^2 x = \frac{1 - 3tg^2 x}{3 - tg^2 x}, \quad tg^2 x = t.$

$t = \frac{1 - 3t}{3 - t} \Rightarrow 3t - t^2 = 1 - 3t \Leftrightarrow t^2 - 6t + 1 = 0$

$D = 36 - 4 = 32 = 2^5 = (4\sqrt{2})^2$

$tg^2 x = 3 \pm 2\sqrt{2}. \qquad t = \frac{6 \pm 4\sqrt{2}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$

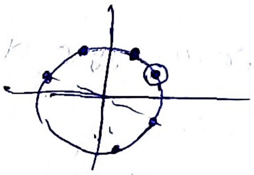
$tg\,x = \pm\sqrt{3 \pm 2\sqrt{2}} \qquad -\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} < -\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} < \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} < \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$

$tg\,x$ arcctg x возрастает. ~~на $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$~~

$\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$

2002. $3: \ \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; $A_{3} = \frac{3}{6} = \frac{3}{5} = 0{,}6$

80. 2. $\quad 120 \cdot 2 + x$

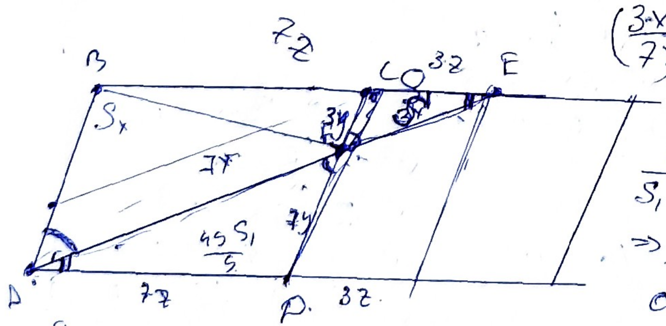


$\frac{120 + x}{200 + x} = 0{,}8 \qquad \frac{320}{400} = \frac{32}{40} = \frac{8}{10}$

$120 + x = 0{,}8 \cdot 200 + 0{,}8x$

$0{,}2x = 8 \cdot 20 - 120 = 160 - 120 = 40 \Rightarrow x = \frac{40}{0{,}2} = \frac{400}{2} = 200$

№8



$\left(\frac{3x}{7x}\right)^2 = \frac{S_1}{S_2} = \frac{9}{49} \Rightarrow S_2 = \frac{49 S_1}{9}$

$S_x + \frac{49}{9}S_1 = S.$

$\frac{S_1}{S_1 + S_x} = \left(\frac{3z}{10z}\right)^2 = \frac{9}{100}$

$\Rightarrow S_1 = 0{,}09 S_1 + 0{,}09 S_x$

$0{,}91 S_1 = 0{,}09 S_x$

$S_x = \frac{91}{9} S_1$

$\frac{S_x}{S_2} = \frac{91}{9}S_1 \cdot \frac{9}{49 S_1} = \frac{91}{49}$

$\frac{S_2}{S} = \left(\frac{7x}{3x}\right)^2 = \frac{49}{9}$

$\frac{S_3 + S}{S} = \frac{100}{9} \quad 9S_3 + 9S = 100S$

$\frac{S_2}{S} \cdot \frac{S}{S_3} = \frac{49}{9} \cdot \frac{9}{91} \quad 9S_3 = 91S. \quad S_3 = \frac{91}{9}S$

$= \frac{49}{91} =$