306-16

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования Башкирский государственный педагогический университет им. М.Акмуллы

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

АКМУЛЛИНСКАЯ ОЛИМПИАДА

по математике

(указать название олимпиады)

Участник Гасанова Карина Рустамовна

(фамилия имя отчество)

Дата проведения олимпиады

«31» марта 2023 г.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	2	2	2	1	2	2	2	2

306-16

ЛИСТ ОТВЕТА

19б

№1.

Числа, которые при делении на 4 дают остаток 3, имеют вид $4n+3$, где n – натуральное число. Т.к. $4n+3$ – ~~двузначное~~, n изменяется от 2 до 24. Проще говоря, таких чисел всего будет 23, первое из них – это 11, а каждое следующее на 4 больше предыдущего. Получаем арифметическую прогрессию. ~~преобразуем формулу~~ Найдём сумму всех элементов

$S_{24} = \frac{(a_1 + a_{24})\,24}{2} = (7+99)\,12 = 1272$. Т.к. первый элемент не двузначный вычтем его:

$1272 - 7 = 1265$. Ответ: 1265.

№2.

Приведём функции в стандартный вид и приравняем $3x + y = 1 \Rightarrow -3x + 1 = y$

$y = \frac{3}{3x+8}$ ОДЗ: $x \neq -2\frac{2}{3}$.

$-3x + 1 = \frac{3}{3x+8}$ решив уравнение, найдём x.

$(-3x+1)(3x+8) = 3$

~~$9x^2 + 24x - 3x + 8 = 3$~~

~~$9x^2 + 21x - 11 = 0$~~

~~$D = 441 + 396 =$~~

$-9x^2 - 24x + 3x + 8 = 3$

$9x^2 + 21x - 5 = 0$

$D = 441 + 180 = 621$

$x_1, x_2 = \frac{-21 \pm 3\sqrt{69}}{18} = \frac{-7 \pm \sqrt{69}}{6} \Rightarrow x_1 = \frac{-7-\sqrt{69}}{6}$ $x_2 = \frac{-7+\sqrt{69}}{6}$

$y_1 = 1 - \frac{-21 - 3\sqrt{69}}{6}$

$y_2 = 1 - \frac{-21 + 3\sqrt{69}}{6}$

$y_1 \cdot y_2 = \left(\frac{6+21+3\sqrt{69}}{6}\right)\left(\frac{6+21-3\sqrt{69}}{6}\right) = \frac{(27+3\sqrt{69})(27-3\sqrt{69})}{36} =$

$= \frac{729 - 621}{36} = \frac{108}{36} = 3$

Ответ: 3.

№3.

$4x^2 + 12x + \frac{12}{x} + \frac{4}{x^2} = 47 \,|\cdot x^2$ ОДЗ: $x \neq 0$.

$4x^4 + 12x^3 - 47x^2 + 12x + 4 = 0$

$$\begin{array}{l|l} 4x^3 + 20x^2 - 7x - 2 & x - 0{,}5 \\ \hline 4x^3 - 2x^2 & 4x^2 + 22x + 4 \\ \quad 22x^2 - 7x & \\ \quad 22x^2 - 11x & \\ \qquad 4x - 2 & \\ \qquad 4x - 2 & \end{array}$$

Один из корней равен 2: $64 + 96 - 188 + 24 + 4 = 0$

Поделим многочлен на $(x-2)$ получим $4x^3 + 20x^2 - 7x - 2 = 0$

Следующий из корней равен 0,5, поделим многочлен на $(x - 0{,}5)$, получим $4x^2 + 22x +$

$4x^2 + 22x + 4 = 0$

$2x^2 + 11x + 2 = 0$

$D = 121 - 16 = 105$

$x_3, x_4 = \frac{-11 \pm \sqrt{105}}{4}$

+) ~~в ответе x_3, x_4 неверный знак (-11)~~

Ответ: $x_1 = 2$, $x_2 = 0{,}5$, $x_3 = \frac{-11-\sqrt{105}}{4}$, $x_4 = \frac{-11+\sqrt{105}}{4}$.

Ответ на 1 стр. Подпись участника

№ 4.

Раз изначально было 200 г сплава, где золото : серебро = 2 : 3, то золота в нём было: $\frac{200 \cdot 2}{(2+3)} = 80$ г, а серебра $= \frac{200 \cdot 3}{(2+3)} = 120$ г. Новый сплав содержит 80% серебра $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ 20% золота. Кол-во золота не изменяется $\Rightarrow$ $80_г = 20\% \Rightarrow 100\% = 80 \cdot 5 = 400$ г. $\Rightarrow$ $\Rightarrow 80\% = 320$ г $-$ серебра. Раз серебра изначально было 120 г., то нам остаётся добавить: $320 - 120 = 200$ г серебра.

Ответ: 200 грамм.

№ 5.

$x^2 - 3|x| + 1 = 0$

если $x \geq 0$: $x^2 - 3x + 1 = 0$

$D = 9 - 4 = 5$

$x_1, x_2 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \quad x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$

$(\sqrt{9} > \sqrt{5}) \Rightarrow x_1$ и $x_2 \geq 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ являются корнями

если $x < 0$: $x^2 + 3x + 1 = 0$

$D = 9 - 4 = 5$

$x_1, x_2 = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \quad x_2 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$

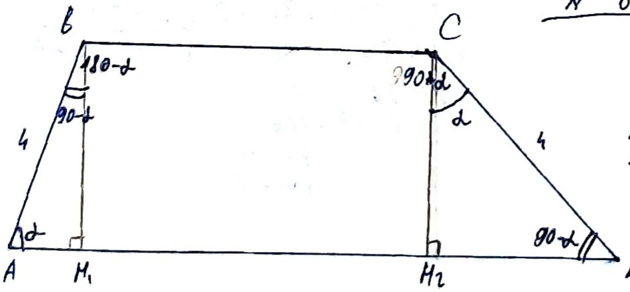
$(\sqrt{9} > \sqrt{5}) \Rightarrow x_1$ и $x_2 < 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ являются корнями

$$\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-3 - \sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-3 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{9 - 6\sqrt{5} + 5}{4} + \frac{9 + 6\sqrt{5} + 5}{4} +$$

$$+ \frac{9 + 6\sqrt{5} + 5}{4} + \frac{5 - 6\sqrt{5} + 9}{4} = \frac{9 + 9 + 9 + 9 + 5 + 5 + 5 + 5}{4} = 14$$

Ответ: 14.

№ 6.



$BC = 6$ см
$AD = 11$ см
$AB = 4$ см
$\angle BAD + \angle CDA = 90°$

$S - ?$

Выразим углы через α.
Пусть $\angle BAD = \alpha$, тогда $\angle CDA = 90° - \alpha$
Углы при боковой стороне в сумме $= 180$
$\Rightarrow \angle ABC = 180° - \alpha$, а $\angle BCD = 180 - (90 - \alpha)$
$= 180 - 90 + \alpha = 90 + \alpha$

Сумма углов в 4-угольнике $= 360° \Rightarrow$
$\Rightarrow$ раз $\angle BAD + \angle CDA = 90°$, то
$\angle ABC + \angle BCD = 360° - 90° = 270° \Rightarrow$

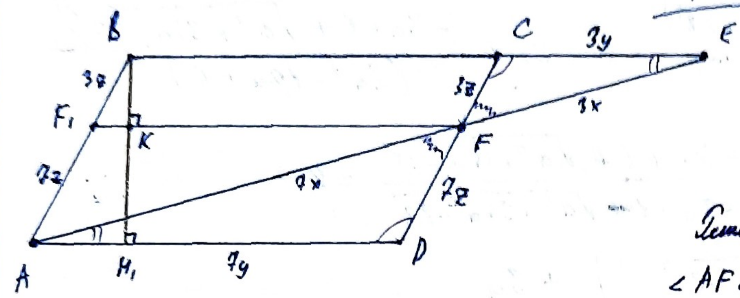
Проведём высоты из $B - BH_1$ и из $C - CH_2$. Они будут равны. Тогда $\angle ABH_1 = 90 - \alpha$, а $\angle H_2CD = \alpha$. $\triangle ABH_1$ и $\triangle CH_2D$ − прямоугольные, где $\angle BAH_1 = \angle H_2CD = \alpha$ и $\angle ABH_1 = \angle H_2DC = 90 - \alpha$ и $BH_1 = CH_2 \Rightarrow \triangle ABH_1 = H_2CD \Rightarrow AB = CD$ и $\alpha = 45°$, тогда $BC = H_1H_2 = 6 \Rightarrow AH_1 = H_2D = \frac{11 - 6}{2} = 2,5 \Rightarrow BH_1 = 2,5$, тогда $S_{ABCD} = \frac{6 + 11}{2} \cdot 2,5 = 8,5 \cdot 2,5 =$
$= 21,25$

Ответ: 21,25

306-16

ЛИСТ ОТВЕТА

№7.



Дано: ABCD – параллелограмм.
AF : FE = 7 : 3
$S_{ABCF} : S_{AFD}$ – ?

Решение:

$\left.\begin{array}{l}\angle AFD = \angle CFE \text{ (вертикальные)} \\ \angle ADC = \angle DCE \text{ (BC} \parallel \text{AD} \Rightarrow \text{накрест-леж.)}\end{array}\right\} \triangle AFD \sim \triangle CFE \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{AF}{FE} = \dfrac{DF}{FC} = \dfrac{AD}{CE} = \dfrac{7}{3}$

Проведём высоту BH_1 и $FF_1 \parallel BC \parallel AD$. $BH_1 \cap F_1F = K$. Т.к. $BC \parallel F_1F$ и $BA \parallel CD$, BCF_1F и AF_1FD – параллелограммы. $BF = CF = 3z$, $F_1A = FD = 7z$.

$\left.\begin{array}{l}\angle ABH_1 \text{ – общий} \\ \angle BF_1K = \angle BAH_1 \text{ (} F_1F \parallel AD \text{)}\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABH_1 \sim \triangle F_1BK \Rightarrow \dfrac{BF_1}{FA} = \dfrac{BK}{KH_1} = \dfrac{3k}{7k}$

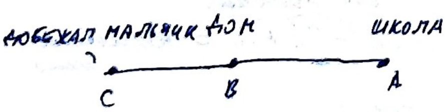
$S_{\text{паралл.}}$ = основание · высоту. $S_{F_1BCF} : S_{F_1FAD} = \dfrac{BC \cdot 3k}{AD \cdot 7k} = \dfrac{3}{7}$.

$\left.\begin{array}{l}\angle AF_1F = \angle FDA \\ F_1A = FD \\ F_1F = AD\end{array}\right\} \triangle AF_1F = \triangle AFD$. Таким образом, если $S_{F_1BCF} = 3S_0$, то $S_{F_1FAD} = 7S_0$, а $S_{F_1FA} = S_{AFD} = \dfrac{7S_0}{2}$.

$\left.\begin{array}{l}S_{ABCF} = 3S_0 + \dfrac{7S_0}{2} \\ S_{AFD} = \dfrac{7S_0}{2}\end{array}\right\} = \dfrac{S_{ABCF}}{S_{AFD}} = \dfrac{3S_0 + \dfrac{7S_0}{2}}{\dfrac{7S_0}{2}} = \dfrac{6S_0 + 7S_0}{7S_0} = \dfrac{13}{7}$

Ответ: 13 : 7. В ответе перепутали местами соотношение

№8.



В обычной ситуации машина проезжает BA с 8^{30} до опред. момента. В этот раз, раз машина доставила школьника с опозданием на 10 мин, то точку B она проехала в 8^{40}. А значит с 8^{10} до 8^{40} (30 мин) она два раза проехала расстояние CB (туда и обратно уже с мальчиком). Т.к. пути равны CB = CB, то только в одну сторону она ехала $30/2 = 15$ минут $= 0{,}25$ часа. До точки C машина доехала в 8^{25}. Значит мальчик к этому моменту бежал 2,25 часа (с 6^{10} до 8^{25}). Обозначим скорость мальчика за v_1, а машины за v_2 и составим пропорцию: $2{,}25v_1 = 0{,}25v_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{v_2}{v_1} = \dfrac{2{,}25}{0{,}25} = 9$ Ответ: в 9 раз.

Ответ на 2 стр. Подпись участника ______

№9.

$(a^2-5a+3)x^2+(3a-1)x+2=0$

$ax^2+bx+c=0$

$D=b^2-4ac=(3a-1)^2-8(a^2-5a+3)=9a^2-6a+1-8a^2+40a-24=a^2+34a-23$

$x_1, x_2=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a} \Rightarrow x_1=\dfrac{(-3a+1-\sqrt{a^2+34a-23})}{(2a^2-10a+6)}$ $\quad x_2=\dfrac{(-3a+1+\sqrt{a^2+34a-23})}{(2a^2-10a+6)}$

Очевидно, что $x_2>x_1 \Rightarrow \dfrac{x_2}{x_1}=2$ (т.к. $\sqrt{x}>0$) $\qquad \dfrac{-3a+1+\sqrt{a^2+34a-23}}{-3a+1-\sqrt{a^2+34a-23}}=2$

$-3a+1+\sqrt{a^2+34a-23}=-6a+2-2\sqrt{a^2+34a-23} \quad |+3a$

$1+\sqrt{a^2+34a-23}=-3a+2-2\sqrt{a^2+34a-23} \quad |-1$

$\sqrt{a^2+34a-23}=-3a+1-2\sqrt{a^2+34a-23} \quad |-\sqrt{a^2+34a-23}$

$-3a+1-3\sqrt{a^2+34a-23}=0 \qquad \Rightarrow a-\sqrt{a^2+34a-23}=\dfrac{1}{3}$

$1=3a-3\sqrt{a^2+34a-23}$

$1=3(a-\sqrt{a^2+34a-23})$

$\sqrt{a^2+34a-23}=a-\dfrac{1}{3} \quad |x^2$

$a^2+34a-23=a^2-\dfrac{2}{3}a+\dfrac{1}{9}$

$34a+\dfrac{2}{3}a=\dfrac{1}{9}+23$

$\dfrac{104a}{3}=\dfrac{208}{9} \quad |\cdot 3 \qquad 104a=\dfrac{208}{3} \Rightarrow 312a=208$

$a=\dfrac{208}{312}=\dfrac{2}{3}$

Ответ: $a=\dfrac{2}{3}$.

№10.

$\dfrac{6k^2-7k+20}{3k-5}=x$, где $x\in\mathbb{Z}$.

$6k^2-7k+20=3kx-5x$

$6k^2-(7+3x)k+20+5x=0$

Допустим, k – нечетное число, тогда, аналогично:

$\dfrac{\overset{\text{чет}}{\overline{6k^2}}-\overset{\text{нечет.}}{\overline{7k}}+\overset{\text{чет}}{\overline{20}}}{\underset{}{\overset{\text{нечет}}{\overline{3k}}-\overset{\text{нечет}}{\overline{5}}}}=\dfrac{\text{нечет}}{\text{чет}}=$ не целое.

Допустим, k – чётное число, тогда k^2 – четное, $6k^2$ – четное

$7k$ – четное $\Rightarrow \overset{\text{чет}}{\overline{6k^2}}-\overset{\text{чет}}{\overline{7k}}+\overline{20}=$ нечётное число

$\overset{\text{нечет}}{\overline{3k}}-\overset{\text{нечет}}{\overline{5}}=$ чётное число

Получим, что $\dfrac{6k^2-7k+20}{3k-5}=\dfrac{\text{чёт.}}{\text{чёт}}$, ~~а такое число будет заведомо нецелым~~

$\Rightarrow k$ – только четные числа.

при $k=2$ и 4 – дробь сократ, ~~а при больших k уже нецелая~~ при $k=10$ тоже

Ответ: 10.