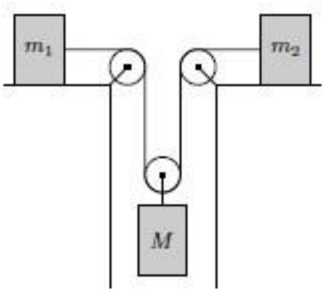
ЗАДАНИЯ ДЛЯ 10–11 КЛАССОВ и СПО

Задача1.Подвижныйблок



Условие задачи

Груз массой M = 84.6 кг опускают в траншею при помощи подвижного блока. По обе стороны траншеи расположены грузы массами m_1 = 26.4 кг и m_2 = 33.8 кг (см. рисунок). На краях траншеи установлены неподвижные блоки. Верёвка, к которой прикреплены грузы, может перемещаться только в плоскости рисунка, горизонтально или вертикально. Трением и растяжением верёвки можно пренебречь, блоки считать невесомыми. Найти ускорение, с которым груз M будет опускаться в траншею.

Решение.

Поскольку блоки считаем невесомыми, а веревку нерастяжимой, то сила натяжения везде одинакова; обозначим её T. Учитывая, что сила тяжести, действующая на грузы m_1 и m_2, уравновешивается силой реакции опоры, ускорение первого из них равно $a_1 = T/m_1$, второго $a_2 = T/m_2$. Для груза M имеем: $F_{тяж} = Mg$, сила натяжения веревки в общем 2T. Таким образом, ускорение направлено вниз и равно $a = g - 2T/M$.

Если первый груз сдвинется в сторону траншеи на расстояние x_1, а второй на расстояние x_2, то груз Mопустится на $x = (x_1 + x_2)/2$. Отсюда можно получить для искомого ускорения $a = (a_1 + a_2)/2$. Объединим все уравнения и выразим T.

$$g - 2\frac{T}{M} = \frac{\frac{T}{m_1} + \frac{T}{m_2}}{2}$$

$$g = T\left(\frac{2}{M} + \frac{1}{2m_2} + \frac{1}{2m_1}\right),$$

$$T = \frac{g}{\frac{2}{M} + \frac{1}{2m_2} + \frac{1}{2m_1}}.$$

Подставляя Tв формулу для ускорения груза M, получим окончательно:

$$g - 2\frac{T}{M} = g - 2\frac{g}{2\frac{M}{M} + \frac{M}{2m_2} + \frac{M}{2m_1}} = 5.77 \text{ м/с}^2$$

Критерии оценки

Правильно записаны ускорения трёх грузов: 3 балла

Искомое ускорение

выражено через ускорения a_1 и a_2: 2 балла

Найдена формула для натяжения верёвки: 3 балла

Получен правильный ответ: 2 балла

Итого: 10 баллов

Задача2.ГоловоломкаАрхимеда

Условие задачи

В двух одинаковых ёмкостях массами M = 340 г содержится одно и то же количество воды массой m = 150 г. Ёмкости устанавливают на две чаши весов. В первую ёмкость аккуратно опускают стальной шарик (плотность ρ_1 = 7850 кг/м^3), подвешенный на нити, так, чтобы он полностью погрузился под воду, но не касался дна. К дну второй ёмкости прикрепляют с помощью тонкой невесомой нити шарик из пенопласта (плотность ρ_2 = 27 кг/м^3) радиусом r_2 = 1.5 см так, чтобы он полностью находился под поверхностью воды. Каким должен быть радиус стального шарика r_1, чтобы чаши весов были уравновешены?

Плотность воды ρ_0 = 1000 кг/м^3.

Решение.

Для стального шарика объёмом V_1 сила тяжести $\rho_1 V_1 g$ направлена вниз, сила натяжения нити T_1 и сила Архимеда $\rho_0 g V_1$ направлены вверх. Таким образом, первый контейнер давит на свою чашу весов с результирующей силой $Mg + mg + \rho_0 g V_1$ (последнее слагаемое уравновешивает силу Архимеда, действующую на шарик). Для шарика из пенопласта объемом V_2 выталкивающая сила равна $\rho_0 g V_2$, сила тяжести $\rho_2 V_2 g$. Из условия равновесия сил можем найти силу натяжения нити:

$$T_2 = (\rho_0 - \rho_2) V_2 g.$$

Сила $\rho_0 g V_2$ уравновешивает силу Архимеда, действующую на пенопластовый шарик и направлена вниз, тогда как сила натяжения направлена вверх. Таким образом, второй контейнер давит на свою чашу весов с результирующей силой

$$Mg + mg + \rho_0 g V_2 - (\rho_0 - \rho_2) V_2 g = Mg + mg + \rho_2 V_2 g.$$ Чаши

весов уравновесятся, если будет выполнено условие

$$\rho_0 V_1 = \rho_2 V_2 \rightarrow r_1 = r_2 \sqrt[3]{\frac{\rho_2}{\rho_0}} = 0.45 \text{ см.}$$

Показательно, что от плотности стали результат в конечном итоге не зависит. Критерии оценки

Найдена результирующая сила, действующая на первую чашу: 2 балла

Найдена результирующая сила, действующая на вторую чашу: 2 балла

Записано условие равновесия: 4 балла

Получен численный ответ: 2 балла

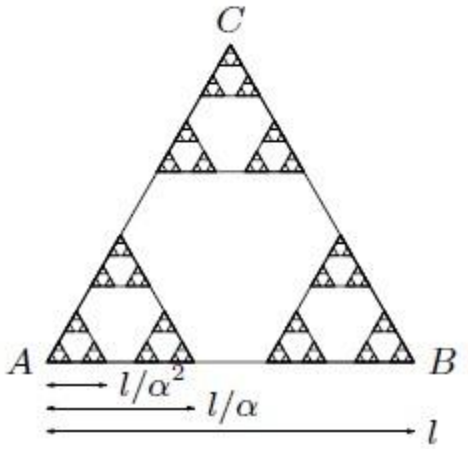
Итого: 10 баллов

Задача3.Сопротивлениебесконечности

Условие задачи

Провод имеет электрическое сопротивление r_0 = 1Ом на единицу длины l. Из провода изготовили конструкцию, изображённую на рисунке. Сначала построили треугольник ABC – равносторонний, со стороной l. Затем точки, отстоящие от вершин на расстояние l/α, попарно соединили проводом между собой, получив три треугольника, в α раз меньшие, чем исходный ABC.

Затем в каждом из трёх маленьких треугольников снова соединили попарно точки, отстоящие от вершин на расстояние l/α^2. Эту операцию провели бесконечное число раз, а потом к точкам A и B подключили напряжение. Чему будет равно общее сопротивление такой конструкции, если $\alpha=4$?

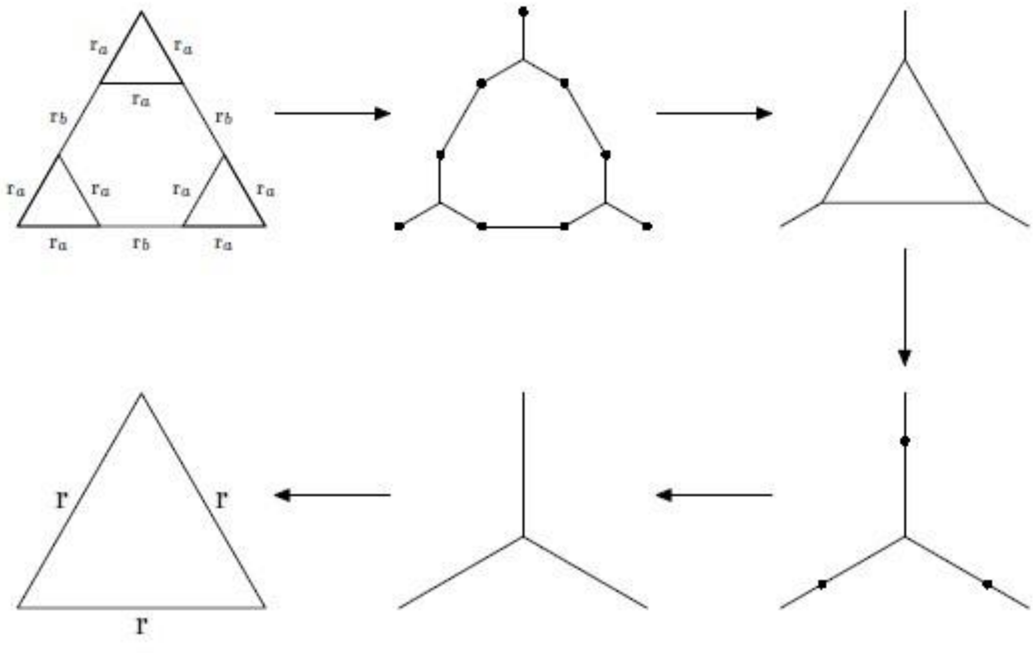


Решение.

Задачу можно решить как использованием альтернативной схемы, так и пользуясь принципом суперпозиции.

1 способ.

Переходя от «треугольника» к «звезде» и обратно, получим такую альтернативную схему:



Пользуясь теми обозначениями, что указаны на рисунке, получим $r = \frac{5}{3} r_a + r_b$.

Если последовательно добавлять маленькие треугольники к вершинам больших, сопротивление между двумя вершинами самого большого треугольника, исходного ABC, будет в каждой i+1-ой итерации равно

$$r_{i+1} = \frac{3}{5}\alpha r_i + \left(1-\frac{2}{\alpha}\right) r_0$$

Поскольку число шагов бесконечно, можем воспользоваться заменой $r_i = r_{i+1} = r_t$, где rt – сопротивление одной стороны равностороннего треугольника, эквивалентное сопротивлению всей конструкции. Из уравнения выше следует:

$$r_t = \frac{3\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}{\frac{5}{3-\alpha}} r_0 = \frac{6}{7} \text{ Ом при } \alpha = 4$$

Тогда окончательно, искомое сопротивление $R = \frac{2}{3}R_t = \frac{4}{7}$ Ом

2 способ.

Пусть через нижний провод с сопротивлением $r_1 = r_0\left(1-\frac{2}{\alpha}\right)$ течет ток I_1, через два верхних I_2. Представим всю цепь как сумму двух контуров: один без нижнего провода, а другой без диагональных проводов, тогда напряжение на каждой вершине есть сумма напряжений в этих двух контурах. Напряжение между A и B выразится как

$$U = 2\left(\frac{I_1}{2}+I_2\right)R\alpha + 2I_2 r_1 + I_2 R\alpha$$

$$U = 2\left(I_1+\frac{I_2}{2}\right)R\alpha + I_1 r_1$$

$$U = (I_1+I_2)R$$

Из разности первых двух уравнений получим

$$(2I_2-I_1)R\alpha = (I_1-2I_2)r_1$$

Чтобы сопротивления имели положительный знак, должно быть $I_1 = 2I_2 = \frac{2}{3}\frac{U}{R}$, откуда можно получить тот же результат, что и в первом случае.

Критерии оценки

Получена альтернативная схема либо рассмотрены два контура: 3 балла
Получена формула для эквивалентного сопротивления 1 или 2 способом: 3 балла
Записана окончательная формула для общего сопротивления: 2 балла
Получен правильный ответ: 2 балла
Итого: 10 баллов

Задача4.Инкубатордлядракона Условие задачи

На столе у юного любителя зоологии стоит лампа мощностью P = 60 Вт. На расстоянии h= 40 см от лампы лежит яйцо дракона, которое можно представить себе как эллипс с большой полуосью a = 60 мм и малой полуосью b = 30 мм. Когда лампа выключена, яйцо имеет комнатную температуру T_1 = 23°C. На сколько градусов увеличится температура яйца спустя 90 минут после того, как юный любитель зоологии включит лампу? Лампа излучает равномерно, причём η = 83% света, достигающего поверхности яйца, преобразуется в тепло. Теплопотерей яйца пренебречь, а его теплоёмкость принять равной C = 200 Дж/°C.

Решение.

Количество теплоты, полученное яйцом, можно представить как $Q= C(T_2 - T_1)$, где T_2 – его температура спустя указанное время после включения лампы. Это же количество теплоты излучит лампа, мощность излучения которой равна ηPво всех направлениях. На расстоянии hна единицу площади поверхности сферы приходится мощность излучения: $\frac{P\eta}{4\pi h^2}$

Умножая эту величину на площадь, занимаемую поперечным сечением яйца, и на время, получим количество теплоты Q. Очевидно, что края яйца чуть больше удалены от источника света, чем его середина. Однако этой разницей в нашем случае можно пренебречь (расчет показывает, что угловой размер яйца при отсчёте от лампы составляет примерно 15°) и считать яйцо плоским для упрощения расчетов.

Площадь эллипса равна πab, тогда равенство излученного и поглощенного тепла запишется в следующем виде:

$$\frac{P\eta t}{4\pi h^2}\pi ab = C(T_2-T_1),$$

откуда искомая разность составляет 4°C.

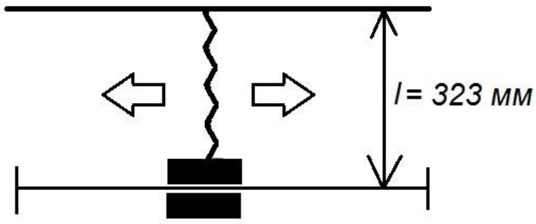
Критерии оценки

Записана формула для количества теплоты: 2 балла
Найдена мощность излучения источника: 2 балла
Записана формула для площади эллипса: 2 балла
Записано равенство излученного и поглощенного тепла: 2 балла
Получен правильный ответ: 2 балла
Итого: 10 баллов

Задача5.Пружинныймаятник

Условие задачи

Ученик построил самодельный пружинный маятник. Для этого он взял грузик массой m = 358 грамм с просверленным посередине желобом и продел сквозь него прямой отрезок проволоки. К грузу он прицепил пружину жесткостью k= 979 Н/м, второй конец которой закрепил в точке, удалённой на l = 323 мм от проволоки. Каким будет период колебаний грузика в полученном маятнике?



Решение.

Потенциальная энергия пружины с собственной длиной уравна

$$E_п = \underline{k}2\underline{y}_2$$

Точка равновесия маятника соответствует наикратчайшему расстоянию от проволоки до места крепления пружины, т.е. минимальной длине пружины. По условию задачи, это расстояние (оно же – длина нерастянутой пружины) равно l. Сдвинем грузик на некоторое расстояние Δx вдоль проволоки. Новое положение определится длиной гипотенузы прямоугольного треугольника с катетами Δxи l. Её квадрат равен $l^2 + \Delta x^2$. Тогда потенциальная энергия пружины станет равной

$$E_п = 2\underline{k}(l_2+\Delta x_2)$$

По сравнению с начальным значением, потенциальная энергия возросла на величину

$$\frac{k\Delta x^2}{2}$$

Отсюда мы можем заключить, что ситуация соответствует линейному гармоническому осциллятору с жесткостью k, либо продифференцировать последнее выражение, чтобы убедиться, что при отклонении грузика на Δxвозникает сила упругости kΔx. В том или ином случае остается лишь воспользоваться формулой для периода колебаний линейного гармонического осциллятора

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 0.12 \text{ с}$$

Критерии оценки

Критерии оценки

Записана формула для потенциальной энергии без растяжения: 2 балла

Записана формула для потенциальной энергии при растяжении: 2 балла

Записана формула периода осциллятора: 2 балла

Доказано, что данная формула может быть использована: 2 балла

Получен правильный ответ: 2 балла

Итого: 10 баллов

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 10–11 КЛАССОВ и СПО

Задача1.

Условие задачи

Провод с сопротивлением R_0 = 1.23 Ом изначально имел температуру T_0 = 20°C и длину l_0 = 10 метров. После нагревания до T= 100°C размеры провода и сопротивление изменились. Найти конечное сопротивление, если коэффициент линейного расширения материала провода равен $\alpha_l = 2.43 \cdot 10^{-3} K^{-1}$, а температурный коэффициент сопротивления равен $\alpha_R = 3.92 \cdot 10^{-3} K^{-1}$.

Решение.

Обозначим удельное сопротивление провода при T0 как ρ0, а его площадь поперечного сечения S0. Связь между длиной и температурой задаётся формулой

$$l = l_0(1+\alpha_l(T-T_0))$$

Похожее выражение запишется и для поперечного сечения:

$$S=S_0(1+\alpha_l(T-T_0))^2$$

Сопротивление при неизменных параметрах провода изменяется с температурой в соответствии с формулой

$$R = R_0(1+\alpha_R(T-T_0))$$

Если взять известную формулу для сопротивления, $R = \rho\frac{l}{S}$, то при неизменных длине и площади сечения меняться может только удельное сопротивление, и закон его изменения должен иметь аналогичный вид:

$$\rho = \rho_0(1+\alpha_R(T-T_0))$$ Подставим все формулы в формулу $R = \rho\frac{l}{S}$:

$$R = \rho_0(1+\alpha_R(T-T_0))\frac{l_0(1+\alpha_l(T-T_0))}{S_0(1+\alpha_l(T-T_0))^2}$$

$$R = R_0\frac{1+\alpha_R(T-T_0)}{1+\alpha_l(T-T_0)} \approx 1.35 \text{ Ом}$$

Если производить расчет без учёта изменений размеров провода, результат будет не сильно отличаться от указанного.

Критерии оценки

Правильно записаны формулы для изменившихся длины, площади сечения и сопротивления: 6 баллов

Полученные выражения подставлены в формулу для R: 1 балл

Найдена итоговая формула для R: 2 балла

Получен правильный численный ответ: 1 балл

Итого: 10 баллов

Задача2.

Условие задачи

Автомобилист едет с постоянной скоростью 80 км/ч и въезжает в тоннель длиной 5 км, где не ловит мобильный интернет. В это время он смотрит трансляцию велогонок, причём до финиша его фавориту остаётся 3.5 км. В тот момент, когда водитель въезжал в тоннель, гонщик имел скорость 40 км/ч, но когда сигнал пропал, велосипедист как раз начал разгоняться под гору, двигаясь равноускоренно до самого финиша. С каким максимальным ускорением должен ехать велогонщик, чтобы водитель, выехав из тоннеля, увидел последние 30 секунд гонки?

Решение.

Для начала выясним, сколько времени займёт путь велогонщика от указанного момента до финиша. Это время складывается из времени, за которое автомобиль проедет тоннель, и дополнительных тридцати секунд: $\underline{S_{авт}} + t_{доп} = 255$ сек

$$t = t_{авт} + t_{доп} = v_{авт}$$

Теперь мы можем записать формулу для расстояния, которое проехал велогонщик, и из неё получить искомое максимальное ускорение:

$$a \quad \underline{\quad t^2}$$

$$S_{вел} = v_{вел} \cdot t + \qquad \underline{{}_{m}}2\underline{{}_{ax}}\, a_{max} =$$

$$\underline{2(S_{вел}}t\underline{-}{}_2\underline{v_{вел} \cdot t)} = 0.021 \text{ м/с}_2$$

Критерии оценки

Найдено время, потраченное велосипедистом: 2 балла

Записана формула для расстояния: 4 балла

Выражено ускорение: 2 балла

Получен численный ответ: 2 балла

Итого: 10 баллов

Задача3.

Условие задачи

Влажность в комнате мальчика Антона составляла 30%, чего недостаточно для комфортного роста его растения юкки. Поэтому он купил увлажнитель, который способен испарять до 5 мл воды каждую минуту. Какой будет установившаяся влажность воздуха в комнате, если окно в ней всегда открыто, и каждую минуту 3% воздуха внутри комнаты заменяется воздухом снаружи? Влажность за окном такая же, какая была в комнате до включения увлажнителя. Температура в комнате 25°C, давление насыщенного водяного пара при данной температуре равно 23 г/м^3, размеры помещения 4×5×2.5 метра.

Плотность воды при 25°C равна 997 г/см^3.

Решение.

Введём обозначения: начальная влажность в комнате ϕ_0, установившаяся спустя некоторое время ϕ_1. Условие стабильности при этом означает, что общая масса водяного пара в объёме помещения остаётся неизменной. Увлажнитель каждую минуту увеличивает массу водяного пара на

$$m_1 = V_0\rho$$

где $V_0 = 5$ мл – объём испаренной воды, $\rho = 997$ г/см^3 – плотность воды при 25°C. При этом η = 3% увлажнённого воздуха из комнаты улетучивается наружу, а взамен поступает столько же сухого воздуха. Найдём массу m_2 водяного пара, улетучивающегося из комнаты за одну минуту. Масса водяного пара mсвязана с абсолютной влажностью уравнением $\vartheta = \frac{m}{V}$

где V – объём комнаты, произведение длины, ширины и высоты. В то же время связь между относительной и абсолютной влажностью имеет вид $\phi = \frac{\vartheta}{\vartheta_0}$

Здесь ϑ_0 – давление насыщенного водяного пара при данной температуре, оно дано в условии. Объединяя формулы, получим $m_2 = \eta V(\vartheta_1 - \vartheta_0)$, $m_2 = \eta V \vartheta_0(\phi_1 - \phi_0)$ Тогда из условия равновесия $m_1 = m_2$ следует

$V_0\rho = \eta V \vartheta_0(\phi_1 - \phi_0)$ Выразим

отсюда искомую величину:

$$\phi_1 = \phi_0 + \frac{V^0\rho}{\eta V \vartheta_0} = 44\%.$$

Критерии оценки

Сформулировано условие равенства масс испарённого и улетучившегося водяного пара: 2 балла

Выражена масса испарённого водяного пара: 2 балла

Выражена масса улетучившегося водяного пара через абсолютную и относительную влажность: 4 балла

Записана окончательная формула, получен ответ: 2 балла Итого: 10 баллов

Задача4.

Условие задачи

Электромагнитный контур содержит длинный прямой провод с сопротивлением R = 57 мОм. Параллельно к проводу на расстоянии d = 3.5 см от него подключён магниторезистор – электронный компонент, сопротивление которого изменяется под действием внешнего магнитного поля. При отсутствующем магнитном поле его сопротивление r_0 = 85 Ом. Также параллельно к проводу подключён источник тока с напряжением U = 12 В. После включения через магниторезистор начинает течь ток с установившимся значением I= 140 мА. Предполагая, что сопротивление магниторезистора линейно зависит от индукции магнитного поля, найдите коэффициент пропорциональности. Магнитная постоянная $\mu_0 = 1{,}27 \cdot 10{-}6$ Гн/м.

Решение.

Запишем изменение сопротивления магниторезистора в виде $r = r_0 + \alpha B$, откуда искомая величина

$$\alpha = \frac{r - r^0}{B}$$

Зависимость индукции магнитного поля от силы тока в проводе имеет вид

$$B = \frac{\mu^0 I}{2\pi d} = \frac{\mu_0 U}{2\pi dR}$$

Сопротивление r_0 дано по условию, а сопротивление r = U/I. Подставляя это в предыдущее уравнение, получим $\alpha = \frac{2\pi}{\mu_0} dR\left(\frac{1}{I} - \frac{r}{U^0}\right) = 590 \frac{Ом}{Тл}$.

Критерии оценки

Искомый коэффициент выражен из линейной зависимости: 2 балла

Записана формула, связывающая индукцию и силу тока в проводе: 2 балла

Записан и применён закон Ома: 2 балла

Получена расчётная формула: 2 балла

Получен правильный ответ: 2 балла

Итого: 10 баллов

Задача5.

Условие задачи

Садовник поливает сад из шланга длиной L= 20 м. Закончив, он наматывает шланг на кабельную катушку в форме цилиндра диаметром D = 40 см и осью симметрии, параллельной земле. Шланг наматывается на катушку так, что он скользит максимально близко к земле. Коэффициент трения между землёй и шлангом f = 0.7, а линейная плотность шланга λ= 220 г/м. Посчитайте работу, которую совершит садовник в процессе наматывания шланга.

Решение.

Сила трения, действующая на шланг, пропорциональна длине той его части, которая остаётся в контакте с землёй в процессе сматывания. Тогда

$$F_{тр} = fmg = f\lambda xg$$

где m = λx – масса части шланга, оставшегося не намотанным. Совершённую садовником против силы трения работу выразим через интеграл

$$A' = \int_0^L F dx = fg\lambda \int_0^L x dx = fg\lambda \left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^L = \frac{fg\lambda}{2} L^2$$

Наматывая шланг, мы поднимаем его центр тяжести. Учитывая, что шланг наматывается на цилиндр с известным диаметром, можно найти число витков: $L/\pi D$=15.9. Даже если конец шланга не в точности совпадает с его началом, можно считать,что центр тяжести расположен в центре катушки. Таким образом, садовник совершил работу по поднятию шланга на высоту, равную

$$A'' = mgh = \lambda Lgh, \ h = D/2$$ И

общая работа равна сумме

$$A = A' + A'' = \lambda gL\left(\frac{D}{2} + \frac{fL}{2}\right) = 310 \text{ Дж.}$$

Критерии оценки

Указано, что общая работа складывается из работы против силы трения и работы против силы тяжести: 2 балла

Найдена первая работа: 4 балла

Найдена вторая работа: 2 балла

Получен правильный ответ: 2 балла

Итого: 10 баллов