

1

Обозначим скорость, с которой нарастает очередь, $v_{оч}$. За промежуток времени $\Delta t = 1$ мин. в коридор зашло Q_0 людей. Длина коридора, которую они занимают, равна $v\Delta t$, а количество человек, располагающихся на одном квадратном метре в этом потоке, (плотность) составляет $\rho_0 = Q_0/(v\Delta tL) = 1/9$ человек/кв.м.

Хвост очереди и люди из потока сближаются с относительной скоростью $v_{оч} + v$. Соответствующие зоны пола коридора $S = (v_{оч} + v)\Delta tL$ заштрихованы на верхнем рис. 3.а. Значит, за время Δt количество людей из потока, примкнувших к очереди, будет равно

$$Q = S\rho_0 = Q_0 \frac{(v_{оч} + v)}{v}.$$

Однако Q_1 человек выйдут за это время через дверь, так что количество людей в очереди возрастет на $Q - Q_1$.

Эти люди размещаются на площади, на которую увеличилась очередь за время Δt , т.е. на площади $S' = v_{оч}\Delta tL$ (см штриховку на нижнем рис. 3.а). По условию плотность людей в очереди $\rho = 5$ человек/кв.м. Т.е. в очереди стало на $S'\rho$ человек больше. Приравнявая это величине $Q - Q_1$ получим

$$Q - Q_1 = Q_0 \frac{(v_{оч} + v)}{v} - Q_1 = v_{оч}\Delta tL\rho.$$

Отсюда находим скорость роста очереди:

$$v_{оч} = \frac{Q_0 - Q_1}{L\rho\Delta t - Q_0/v} = \frac{1}{88} \text{ м/сек}$$

Ответ: $v_{оч} = 0.68$ м/мин.

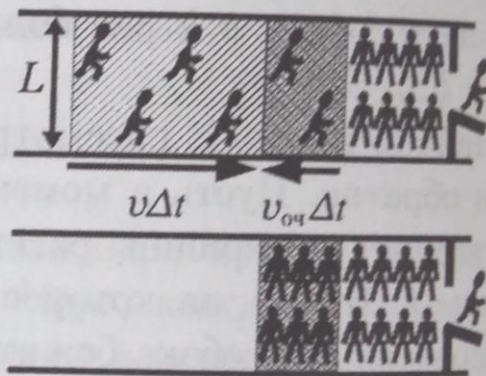


Рис. 3.а

2

Обозначим искомое расстояние через x и предположим, что оно не ноль и не бесконечность. Тогда через большой промежуток времени Джерри будет иметь скорость k/x . С другой стороны, эта скорость должна равняться скорости Тома V , так как лишь в этом случае x не меняется. Значит, $x = k/V$.

Если в некоторый момент расстояние между Томом и Джерри меньше найденного x (как, например, вначале), скорость Джерри больше скорости Тома, и расстояние между ними увеличивается, приближаясь к x . Если же расстояние между ними вдруг стало бы больше x , скорость Тома стала бы больше скорости мышонка, и расстояние снова стало бы приближаться к x . Значит, никакого другого (нулевого или бесконечного) ответа, кроме найденного x , не существует.

Ответ: Расстояние окажется равным k/V .

3

Легко найти объем воды $V_1 = M/\rho_0 = 1 \text{ м}^3$ и суммарный объем шариков $V_2 = m/\rho = 0.625 \text{ м}^3$. Таким образом, общий объем пустот между шариками $V_3 = M/\rho_0 - m/\rho = 0.375 \text{ м}^3$; объем пустот составляет долю $k = V_3/V_2 = 3/5$ от объема шариков.

Поскольку шарики менее плотные, чем вода, они будут всплывать, при этом часть шариков будет находиться под водой. Сила тяжести, действующая на шарики, уравнивается силой Архимеда: $mg = \rho_0 g V_4$, где V_4 — объем находящихся под водой шариков. Отсюда $V_4 = m/\rho_0 = 0.5 \text{ м}^3$. Объем пустот между находящимися под водой шариками равен $V_5 = kV_4 = 0.3 \text{ м}^3$; этот объем заполнен водой. Следовательно, объем воды, находящейся ниже нижнего уровня шариков, равен $V_6 = V_1 - V_5 = 0.7 \text{ м}^3$. Поскольку вода объема V_1 доходит до уровня h , вода объема V_6 доходит до уровня $h_1 = hV_6/V_1 = 0.7 \text{ м}$ от дна — это нижняя граница шариков. Таким образом, самые верхние шарики расположены на уровне $x = h + h_1 = h(2 - \rho/\rho_0 + m/M)$.

Ответ: 1.7 м от дна.

Выделим на начальном участке графика маленький кусочек, мало отличающийся от отрезка прямой. На рисунке 223.а этот кусочек выделен заштрихованным полосатым прямоугольником.

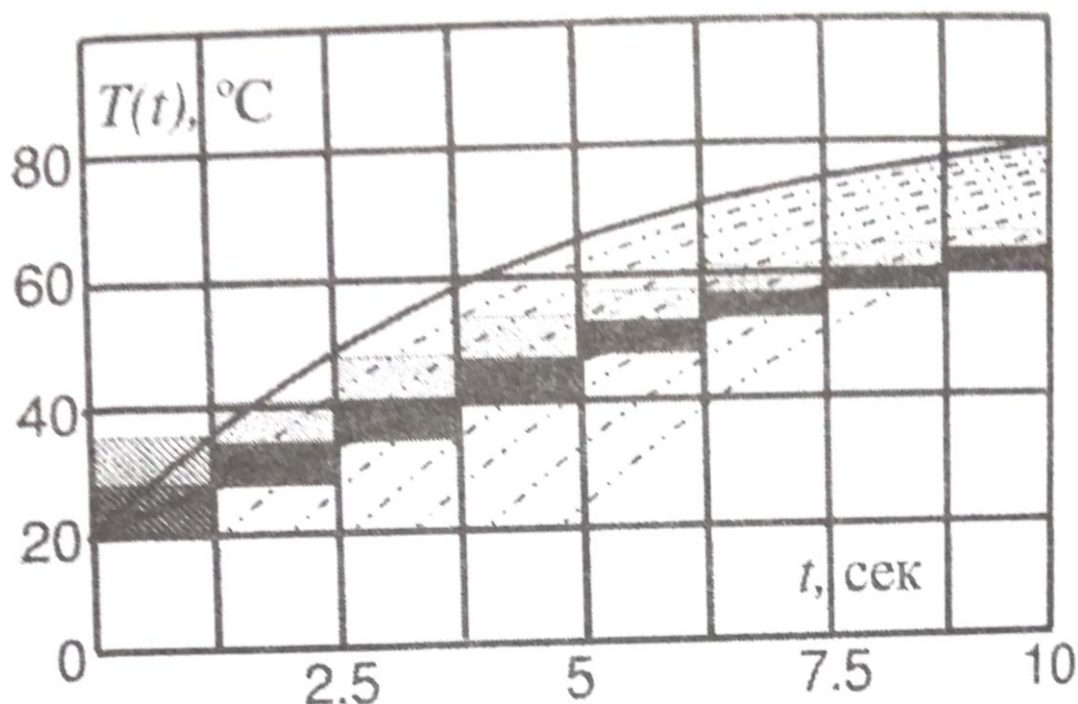


Рис. 223.а

Если массу воды в сосуде увеличить в 2 раза, то жидкость на рассматриваемом интервале будет нагреваться в 2 раза медленнее. Т.е. чтобы построить первый отрезок графика для системы, слитой из двух сосудов, первый отрезок исходного графика надо сжать по вертикали в 2 раза. Соответствующий сжатый прямоугольник закрашен темно серым цветом, отрезок нового графика соединяет его диагонали.

Затем оставшуюся кривую надо сдвинуть *вправо* (см. штрих-пунктирную линию) и повторить рассуждение для следующего кусочка: см. следующий полосатый прямоугольник на рис. 223.а. Для простоты

все прямоугольники у нас одной ширины, высота полосатого прямоугольника такая, что график идет по его диагонали.

Мы делаем сдвиг *вправо* (а не *вниз*), так как угол наклона графика зависит от теплопотерь, которые, в свою очередь, по условию зависят от температуры, а не от времени.

Итак, при данной температуре мы уменьшаем кусочек графика и строим очередной кусочек требуемого графика.

Ответ: См. рис. 223.а

Кроме силы тяжести, на уголок действуют силы со стороны на-
ходящейся в нем воды. Когда вода меняет направление скорости, она
передает уголку импульс. Следовательно, на уголок действуют силы
приложенные в точке крепления уголка А и в точке изгиба В.

Вычислим силу F , действующую в точке В. Во-первых, она направле-
на под углом 135° к сторонам уголка, поскольку она противоположна по
направлению изменению импульса воды при повороте. Обозначим пло-
щадь сечения трубки, из которой сделан уголок, через S ; скорость воды
— через v , ее плотность — через ρ . Тогда масса воды, протекающей по
уголку за время t , равна ρSvt , ее импульс $p_{\text{нач}} = p_{\text{кон}} = \rho S v^2 t$. Изме-
нение вектора импульса воды в результате поворота струи в уголке за
это время (см. рис. 166.а) $\Delta p = \sqrt{2} \rho S v^2 t$, значит, сила, с которой уголок
действует на воду, $F = \sqrt{2} \rho S v^2$. С такой же по величине, но противо-
положной по направлению силой, действует струя воды на уголок. Если
скорость воды удвоить, то эта сила увеличится в 4 раза.

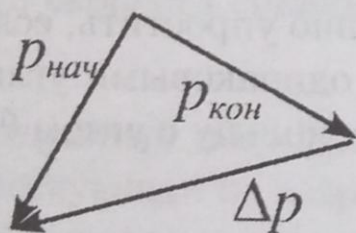


Рис. 166.а

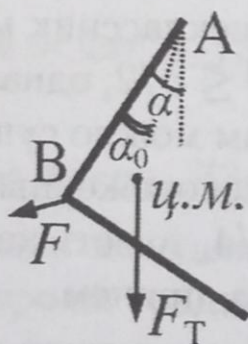


Рис. 166.б

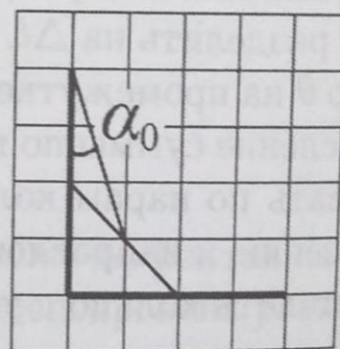


Рис. 166.с

Найдем условие равновесия уголка. Моменты сил, действующих на
него, скомпенсированы. Будем вычислять моменты относительно точки
А, см. рис. 166.б. Тогда сила, действующая со стороны оси, и сила, воз-
никающая из-за изменения направления течения воды в точке А, имеют
нулевые моменты. Если обозначить длину стороны уголка l , то плечо

силы F равно $l/\sqrt{2}$. Сила тяжести F_T приложена в центре масс уголка. Обозначим расстояние от точки А до центра масс l_1 . Тогда плечо силы тяжести равно $l_1 \sin(\alpha - \alpha_0)$, где α_0 – угол между направлениями из точки А на точку В и на центр масс. Таким образом, условие равенства моментов

$$\frac{Fl}{\sqrt{2}} = F_T l_1 \sin(\alpha - \alpha_0).$$

При удвоении скорости воды сила F увеличивается в 4 раза. Если β – искомый угол, то

$$\frac{4Fl}{\sqrt{2}} = F_T l_1 \sin(\beta - \alpha_0).$$

Следовательно, $\sin(\alpha - \alpha_0) = 4 \sin(\beta - \alpha_0)$.

Осталось найти угол α_0 . Центр масс уголка находится посередине между серединами его сторон (см. рис. 166.с). Поэтому $\operatorname{tg} \alpha_0 = 1/3$.

В итоге имеем

$$\beta = \alpha_0 + \arcsin(4 \sin(\alpha - \alpha_0)), \quad \alpha_0 = \operatorname{arctg}(1/3).$$

Подставляя $\alpha = 30^\circ$, получаем ответ.

Ответ: Вода будет бить из уголка под углом 71.7° к горизонту.

6

Можно перерисовать схему так, как показано на рисунке

1

Лампочки 1 и 2 не включены в новую схему, так как они подключены параллельно с проводами, т.е. закорочены и гореть не будут. Лампочка горит тем ярче, чем больше на ней напряжение и ток. Самая яркая лампочка, тогда будет 6, так как напряжение на ней максимально и равно напряжению источника. Из оставшихся лампочек 3,4,5 наиболее ярко будет гореть 4, так как ток через нее больше чем токи через лампочки 3,5 и равен сумме последних.

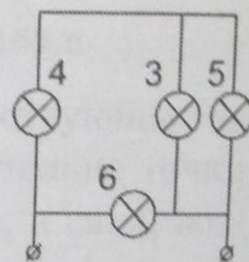


Рис.1.

Наконец лампочки 3 и 5 подключены параллельно и светятся одинаково слабо.

Ответ: лампочки 1 и 2 не горят, тускло горят 3-я и 5-ая, еще ярче горит 4-ая, 6-ая лампочка – самая яркая.

Зонд будет удерживаться, пока сила атмосферного давления $p_0 S$, действующая на пластины, вместе с весом гелия $\rho_{He} g V$ превосходит Архимедову силу $\rho_B g V$, тянущую его вверх, т. е. когда $S p_0 > (\rho_B - \rho_{He}) g V$. Отсюда выражаем S .

Ответ: Наименьшая площадь пластины $S = 70 \text{ см}^2$.